«Hvilke løsningsstrategier tar elever på 8.trinn i bruk i møte med figurmønstre?»

En kvalitativ teoridrevet videostudie av elevers bruk av løsningsstrategier på 8.trinn i arbeid med oppgaver om figurmønster.

Hedda Skjelbreid Rønningen

Masteroppgave i GLU 5-10 i matematikk ved NLA Høgskolen Bergen

Våren 2023

Kontaktinformasjon:
Tlf.: +47 92 01 34 33
Mail: Hedda4life@gmail.com

Sammendrag

I denne masteroppgaven har jeg undersøkt hvilke løsningsstrategier elever på 8.trinn tar i bruk i møte med figurmønstre. Begrepet «løsningsstrategier» er delt opp i to underbegreper *generaliseringsstrategier* og *løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering*. TIMSS-undersøkelser fra 2015 og 2019 indikerer at elever på ungdomsskolen scorer dårlig på algebraiske oppgaver (Kaarstein, Radišić, Lehre, Nilsen & Bergem, 2020). Forskning har vist at figurmønstre kan oppmuntre elevene til å generalisere, som anses som en av de viktigste kompetansene innenfor algebra (Lannin, 2005; Lee, 1996). Av den grunn anbefaler flere forskere å bruke figurmønstre i introduksjonen til algebra. Hensikten med studien er å gi en oversikt over hvilke løsningsstrategier elevene brukte i arbeid med figurmønstre.

Studien benytter en kvalitativ tilnærming med video i gruppeobservasjonene og intervjuene. For å innhente data gjennomførte jeg to gruppeobservasjoner med tre elever i hver gruppe, etterfulgt av individuelle intervjuer med elevene. I forbindelse med gruppeobservasjonen arbeidet elevene med kartleggingsoppgaver hentet fra tidligere faglitteratur. Da jeg analyserte dataene, brukte jeg en teoridrevet videoanalyse som resulterte i syv kategorier. Disse kategoriene ble presentert hierarkisk basert på grad av generalitet.

Resultater fra studien min indikerer at elevene brukte generaliseringsstrategier flere ganger enn løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering. Til tross for dette funnet brukte elevene løsningsstrategier som resulterte i feil svar oftere enn løsningsstrategier som resulterte i riktig svar. Dette funnet hevder jeg kan ha en sammenheng med elevenes dårlige resultater innenfor algebra i TIMSS-undersøkelsene fra 2015 og 2019 (Kaarstein et al., 2020). Et annet funn i studien min var at elevene ikke hadde tilstrekkelig god nok kompetanse innen algebraisk tenkning. Resultater viser at kun to av seks elever brukte løsningsstrategier som kategoriseres som den høyeste graden av generalitet. Dette funnet kan ha en sammenheng med at elever er i stand til å gjenkjenne og fullføre figurmønstre, men har utfordringer med å finne en formel som kan brukes for å beskrive mønsterets oppbygning (Amit & Nera, 2004). På grunn av begrensninger i utvalget av elever i min studie, oppfordrer jeg til videre forskning innen dette temaet. Det anbefales å inkludere et større utvalg elever og flere skoler for å øke generaliserbarheten av funnene.

Abstract

In this master's thesis, I have examined the solution strategies utilized by 8th grade students when encountering pattern problems. The term "solution strategies" is divided into two subcategories: *generalization strategies* and *non-generalization solution strategies*. TIMSS-surveys from 2015 and 2019 indicate that secondary school students perform poorly on algebraic tasks (Kaarstein, Radišić, Lehre, Nilsen & Bergem, 2020). Research has shown that pattern problems can encourage student to create generalizations, which is considered one of the most important competencies in algebra (Lannin, 2005; Lee, 1996). For this reason, several researchers recommend using pattern problems in the introduction to algebra. The purpose of this study is to provide an overview of the solution strategies used by students when working with pattern problems.

The study employs a qualitative approach using video in group observations and interviews. To collect data, I conducted two group observations with three students in each group, followed by individual interviews with the students. During the group observations, the students worked on assessment tasks drawn from previous academic literature. To analyse the data, I used a theory-driven video analysis that resulted in seven categories. These categories were presented hierarchically based on the degree of generality.

The results of my study show that students used generalization strategies more frequently than non-generalization solution strategies. Despite this finding, students used solution strategies that produced incorrect answers more often that those that generated correct answers. I argue that this finding may be related to the students' poor performance in algebra in the TIMSS-surveys from 2015 and 2019 (Kaarstein et al., 2020). Another finding in my study was that the students did not have a sufficiently good competence in algebraic thinking. Results show that only two out of six students used solution strategies categorized as the highest degree of generality. This finding may be related to the fact that students are able to recognize and complete pattern problems, but have difficulties finding a formula that can be used to describe the pattern's structure (Amit & Nera, 2004). Due to limitations in the sample of students in my study, I encourage further research in this area. It is recommended to include a larger sample of students and more schools to increase the generalizability of the findings.

Forord

Denne avhandlingen marker slutten på masterutdanningen ved NLA Høgskolen i Bergen. Gjennom 5 år med utdanning har jeg fått kunnskap som har vært lærerik, og kompetanser jeg skal ta meg videre i livet både som menneske, men også som lærer.

Masterprosessen har vært krevende og utfordrende, men samtidig også interessant og utrolig lærerik. Denne avhandlingen har gitt meg mulighet til å fordype meg i viktige matematiske temaer, temaer som jeg opplever har fått for lite fokus i skolen. Dessuten vil jeg ta med meg erfaringene fra denne prosessen som lærer i grunnskolen.

Under denne prosessen har det vært viktig å ha gode støttespillere på laget. Jeg ønsker å takke mine studievenner fra NLA Høgskolen for et fantastisk samhold og gode samtaler. Takk til mine nærmeste og familie som har kommet med motiverende ord og inspirasjon da jeg trengte det. Jeg vil spesielt gi en stor takk til veilederen min, Andreas Lorange, som har kommet med gode, konkrete tilbakemeldinger og har vært tilgjengelig til enhver tid dersom jeg skulle trenger hjelp i denne prosessen. Til slutt vil jeg rette en takk til skolen, læreren og elevene ved skolen jeg utførte studien.

Bergen, mai 2023

Hedda Skjelbreid Rønningen

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1. Bakgrunn

Utdanningsdirektoratet (2020) skriver at et av formålene med matematikk er å utvikle elevens språk for resonnering, kritisk tenkning og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering. Matematikk skal hjelpe elevene å utvikle seg og forberede seg til samfunnet og arbeidslivet gjennom utforskning og problemløsning (Utdanningsdirektoratet, 2020). I skolen er matematikk blant de mest sentrale fagene og mottar betydelig omfang av undervisningstid. På ungdomsskolen skal elevene ha gjennomført 313 timer med matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020). Til tross for dette indikerer TIMSS-undersøkelsene fra 2015 og 2019 at elever på ungdomstrinnet presterer lavt innenfor generell matematisk kompetanse, og spesielt algebra. Innenfor generell matematisk kunnskap har norske elever på ungdomstrinnet hatt en signifikant tilbakegang fra TIMSS 2019 og TIMSS 2015 med en gjennomsnittlig nedgang på 9 poeng (Kaarstein, Radišić, Lehre, Nilsen & Bergem, 2020, s. 16).

TIMSS undersøkelsene kategoriseres inn i fire matematiske temaer: tall, algebra, geometri og statistikk. Algebra er vanligvis assosiert med matematikk som et språk og regnes ofte som en bro for å forstå matematikk (Mason, 1996, s. 9). Flere elever fremhever algebra som noe av det mest krevende i matematikken (Barbosa & Vale, 2015). TIMSS-resultatene indikerer at elever scorer lavest ved algebraiske oppgaver, men har hatt en fremgang med 6 poeng fra 2015 til 2019 (Kaarstein et al., 2020, s. 18). Til tross for at norske elever har hatt en fremgang med 6 poeng i algebra, er resultatene dårlige sammenlignet med andre nordiske land.

Algebra har fått en større plass innenfor matematikkfaget, og læreplanen inneholder flere kompetansemål som omhandler algebraiske ferdigheter (Utdanningsdirektoratet, 2020). Økt fokus i matematikken indikerer at utviklingen av algebraisk kompetanse og algebraisk tenkning er viktig. Som en konsekvens av dette blir det stilt spørsmål om hvordan man kan lære bort algebra på en forståelig måte. Radford (2010) hevder at figurmønster er en av de mest anbefalte måtene å introdusere algebra for elevene. Lannin (2005) støtter Radford (2010) og skriver «as a means for introducing student to algebra, pattern activities have been recommended, due to their dynamic representation of variables» (s. 233). Kiliç (2016) hevder at figurmønster er hjertet og sjelen til matematikken, og nevner flere fordeler med figurmønster. Noen av fordelen med figurmønstre er at det kan bidra til utviklingen av funksjonell tenkning, aritmetiske operasjoner, fremskape generaliseringer eller se sammenhenger (Kiliç, 2016, s. 2106). Mason, Graham og Johnston-Wilder (2011) hevder at generalisering er et av de mest fundamentale byggesteinene i matematikken, og bør implementeres i alle matematiske emner. Videre hevder de at en undervisningstime som ikke gir elevene muligheten for å generalisere ikke kan kategoriseres som en matematikktime (Mason, Graham & Johnston-Wilder, 2011).

I løpet av min tid på grunnskolen var matematikk et av fagene jeg likte best og opplevde mestring i. Mine beste opplevelser i matematikk var å arbeide med algebra. Til tross for mitt store engasjement for algebra hadde jeg problemer med å forstå sammenhengen innen figurmønsteroppgaver. Det var utfordrende å forstå oppbygningen av mønstrene, som ofte resulterte i en ukorrekt formel eller gjetting av en formel. Jeg har i løpet av mine fem år på lærerutdanningen lært at det er viktig å utfordre sine «svake sider», for å kunne styrke dem. Dette var en av grunnene til at jeg ønsket å skrive om figurmønster. Dessuten har erfaringer fra praksisperioder vekket en interesse over elevenes forskjellige tankeprosesser til de ulike matematikkoppgavene. Kombinasjonen av TIMSS-undersøkelsene, forskeres anbefaleringer og teori og mine erfaringer dannet et grunnlag for hva vårens prosjekt og masteravhandling skulle handle om.

1.2 Studiens forskningsspørsmål

På grunn av tidsomfanget til masteroppgaven vil det være knapt med tid til å utforske elevers reaksjon på pre-algebra i møte med figurmønsteroppgaver. Med utgangspunkt i bakgrunnen for studien og tidsomfanget, har jeg valgt å undersøke hvilke løsningsstrategier som anvendes av elever på 8.trinn når de arbeider med figurmønstre, med tanke på at generalisering har fått tillagt større vekt i utdanningen. Målet med forskningsspørsmålet mitt er å gi økt kunnskap og oversikt over hvordan elever anvender generalisering i figurmønstre, hvilke løsningsstrategier som blir benyttet mest og hvilket nivå av generalitet elevens løsningsstrategier består av. Forskningsspørsmålet jeg har valgt er:

Hvilke løsningsstrategier tar elever på 8.trinn i bruk i møte med figurmønstre?

1.3 Oppgavens struktur

Hensikten med denne studien er å undersøke hvilke løsningsstrategier elever på 8.trinn tar i bruk i møte med figurmønsteroppgaver. I kapittel 1 introduserer jeg bakgrunnen for studien og forskningsspørsmålet med utgangspunkt i hvorfor jeg betrakter dette temaet som viktig. Kapittel 2 presenteres teori som er sentralt og aktuelt for forskningsspørsmålet mitt. Videre i oppgavene vil beskrive hvilke metodiske og analytiske tilnærminger jeg har brukt, og begrunne hvorfor de egner seg til forskningsspørsmålet mitt. Dette vil bli begrunnet i kapittel

3. I kapittel 4 vil jeg presentere resultater fra datainnsamlingen og en analyse av kategoriseringen. Kapittel 5 vil gi en generell fremstilling av funnene og bli drøftet med utgangspunkt i relevant teori. Oppgaven vil ha en avsluttende del der jeg vil evaluere om forskningsspørsmålet har blitt besvart, og diskutere veien videre for studien min.

2. Teori

I denne studien undersøker jeg hvilke løsningsstrategier som blir tatt i bruk av elever på 8.trinn ved arbeid med figurmønsteroppgaver. Oppgaven vil starte med å beskrive det sosiokulturelle læringsperspektivet som et rammeverk for studien min. Sentrale begreper i studien inkluderer *figurmønster* og *løsningsstrategier*. Jeg vil etter en presentasjon av rammeverket gjøre rede for de sentrale begrepene, for å kunne etablere en felles ramme ved senere beskrivelser. Deretter vil jeg kort gjøre rede for hvordan algebra og algebraisk tenkning harmonerer med studien min. Avslutningsvis vil jeg presentere generaliseringsstrategier fra tidligere studier i hierarkisk rekkefølge, og henvise til tidligere forskning av generalisering av figurmønster.

2.1. Sosiokulturell læringsperspektiv

Som overordnet rammeverk for studien min har jeg valgt et sosiokulturelt læringsperspektiv. Det sosiokulturelle læringsperspektivet handler om at «læring har med relasjoner mellom mennesker å gjøre, læring skjer gjennom deltaking og gjennom samspill mellom deltakerne. Språket og kommunikasjon er sentralt i læringsprosessene og balansen mellom det individuelle og det sosiale er et kritisk aspekt av hvert læringsmiljø» (Dysthe, 2001, s. 33). Sosiokulturelle perspektiver har fokus på at kunnskap blir konstruert gjennom samhandlinger med andre, og i en kontekst (Dysthe, 2001). Wittek (2021) legger frem fem sentrale perspektiver ved et sosiokulturelt syn på læring, som er: Læring er historisk og kulturell, læring er mediert, læring er situert interaksjon, læring som transformasjon og læring er kontekstuelt. Jeg har valgt å ta utgangspunkt i punktene *læring er mediert* i lys av språket og *læring er situert interaksjon*, fordi medierende redskaper og situert interaksjoner vil påvirke det analytiske arbeidet. Først vil jeg beskrive hva det innebærer at læring er mediert i lys av språket som en del av rammeverket for studien min. Deretter vil jeg forklare situert læring som utgangspunkt til mitt rammeverk.

2.1.1 Læring er mediert

Wittek (2021) beskriver *mediert læring* på følgende måte: «At læring er mediert innebærer at vi lærer og utvikler oss gjennom sosial og kulturell deltakelse, og ved å benytte de mulighetene som knytter seg til de kulturelle verktøyene» (s. 49). Vygotsky brakte inn begrepet «mediering» eller formidling som omfavner all type støtte eller hjelp i læringsprosessen, uavhengig om det er personer eller redskaper. Bøker, filmer, video, pc eller konkreter kan være medierende redskaper.

Både Wittek (2021) og Dysthe (2001) mener at språket er det dominerende medierende redskapet for mennesket og at kulturelt mediert handling er en toveis læreprosess. At kulturelt mediert handling er en toveis læreprosess mener Wittek (2021) innebærer at på den ene siden tilegner mennesker seg kunnskap gjennom deltakelse i kultur og ved å bruke gjenstander, symboler og språk som finnes i kulturene. På den andre siden blir mennesket bevisst på hvem vi er, og hvordan man definerer seg som deltaker i bestemt kulturell praksis ved å bruke kulturelle redskaper (Wittek, 2021). Wittek (2021) legger vekt på at tegn og symboler kan eksistere i den enkelte personens tenkning. Tegn og symboler er et viktig element i algebraisk tenkning og algebraisk notasjon. Hvordan elevene bruker tegn og symboler i språket er sentralt for å besvare forskningsspørsmålet mitt.

Mennesker bruker språket til å forstå og tenke for seg selv, for deretter å uttrykke det vi forstår til andre. Formålet med studien min er å finne ut hvilke generaliseringsstrategier elever på 8.trinn bruker. Språket er viktig i formidlingen av elevens tankeprosess, og for å kunne belyse denne sammenhengen er det nødvendig å undersøke språkbruken nærmere. «Kommunikasjon og språk er ikke bare et læringsmiddel, men grunnleggende for at læring og tenking skal skje. Dewey forklarer det på følgende måte: «kommunikasjon er en prosess der en deler erfaringer slik at det en deler, blir felles»» (Dysthe, 2001, s. 49). Studien min ønsker å se hvordan elevene kommuniserer med andre elever og meg i forklaring av de ulike oppgavene. Årsaken til dette er fordi noen av generaliseringsstrategiene som blir beskrevet i kapittel 2.4 «Generaliseringsstrategier av figurmønstre» innebærer bruk av språket både muntlig og skriftlig.

2.1.2 Læring er situert

Læring er situert er en viktig del av det sosiokulturelle perspektivet. Relasjoner og interaksjon mellom mennesker er en sentral dimensjon når man forstår læring fra et sosiokulturelt perspektiv (Wittek, 2021). Situert læring betegner en tilnærming som anerkjenner at læring er sterkt forankret i de konkrete situasjoner og kontekster der den foregår. Videre anerkjennes det at det skjer en integrering av tanke og handling i interaksjonen mellom individet og omgivelsene. Dette innebærer at læring ikke kan sees isolert fra situasjonen og konteksten der den skjer, men er tett knyttet til det sosiale og materielle miljøet der handlingene utspiller (Wittek, 2021). Wittek (2021) mener at å åpne muligheten for å invitere andre elever inn i tenkningen sin, kan være noe av det viktigste som kan gjøres for å hjelpe andre med å lære. Gjennom situert interaksjon kan jeg se om elevene lærer av hverandre, og bli påvirket av hverandres tankeprosess ved å invitere hverandre inn i tenkningen sin.

2.2 Begrepsavklaring

I dette avsnittet vil sentrale begreper som *figurmønster* og *løsningsstrategier* bli definert. Figurmønster vil være et viktig begrep å ha kjennskap til ved videre lesing av oppgaven. Avsnittet vil avsluttes med min forståelse av begrepet *løsningsstrategi* med underkategoriene *generaliseringsstrategier* og *løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering*.

2.2.1 Figurmønster

I følge Zazkis og Liljedahl (2002) er figurmønster hjerte og sjelen i matematikken. Noen forskere bruker begrepet *figurmønster*, mens andre bruker *figurtall* når de snakker om det samme temaet. Jeg skal nå definere begrepet figurmønster i lys av Strømvåg (2017) og Karlsen (2014) sine definisjoner. Strømvåg (2017) beskriver figurmønster i skolematematikken på følgende måte: «geometriske konfigurasjoner [som er] oppstilt på linje, der utviklingen som kan observeres i de gitte konfigurasjonene tenkes å fortsette i det uendelige» (s.73). Matematikksenteret (u.å., sitert i Karlsen, 2014, s. 64) definerer figurtall som «tallrekker som forandrer seg etter bestemt mønster, og som kan representeres geometrisk». Det finnes flere ulike typer av figurmønster, for eksempel *ordinært figurmønster*. Strømvåg (2017, s. 73) beskriver «ordinære figurmønstre» som en formel for det n-te elementet i tallfølgen avbildet fra figurmønsteret, og representeres ved en eksplisitt eller en implisitt formel.

En fordel med å bruke figurmønster i matematikken er muligheten elevene får til å oppdage mønsterets oppbygning på forskjellige måter. På den måten kan figurmønster åpne for ulike tolkninger og generaliseringsstrategier.

2.2.2 Løsningsstrategi

Forskningsspørsmålet mitt tar utgangspunkt i begrepet *løsningsstrategier*. Jeg tolker begrepet løsningsstrategier på følgende måte:

> «En løsningsstrategi innebærer en metode eller tilnærming som brukes til å løse et problem eller en oppgave. Løsningsstrategier kan variere avhengig av problemets kompleksitet og involvere identifisering og bruk av relevante matematiske konsepter, utførelse av matematiske operasjoner eller andre kreative tilnærminger».

I studien min er løsningsstrategi et overordnet begrep for *generaliseringsstrategier* og *løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering*. I dette avsnittet vil jeg ta for meg forskjellen mellom en *generaliseringsstrategier* og *løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering*.

Generalisering

Generalisering har gradvis fått en større plass i matematikken, og «generalisering og abstraksjon» er et av *kjerneelementene* i den nye læreplanen. «Kjerneelementene er det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen, og kjerneelementene er sentralt å lære for kunne mestre og anvende faget» (Kunnskapsdepartementet, 2017). Kjerneelementene omfatter også «sentrale begreper, metoder, tenkemåter, kunnskapsområder og uttrykksformer […] som skal prege innholdet og progresjonen i læreplanene» (Kunnskapsdepartementet, 2017). På den måten skal elevene få utviklet forståelse av innhold og sammenhenger i faget. En måte å forstå generalisering i matematikken er ved å ta utgangspunkt i Utdanningsdirektoratet (2020) sin definisjon. Utdanningsdirektoratet (2020) har definert generalisering i matematikken på følgende måte: «Generalisering i matematikk handler om at elevene oppdager sammenhenger og strukturer og ikke blir presentert for en ferdig løsning. Det vil si at elevene kan utforske tall, utregninger og figurer for å finne sammenhenger og deretter formalisere ved å bruke algebra og hensiktsmessige representasjoner».

Siden generalisering i matematikken og figurmønster har blitt forsket mye på de siste årene, har forskere definert generalisering forskjellig. Radford (2010) definerer generalisering på følgende mate: «Generalizing a pattern algebraically rests on the capability of grasping a commonality noticed on some elements of a sequence S, being aware that commonality applies to all the terms of S and being able to use it to provide a direct expression of whatever term of S» (s. 42).

Lannin, Barker og Townsend (2006) referer til Kaput's (1999) definisjon av generalisering:

> «Deliberately extending the range of reasoning or communication beyond the case or cases considered, explicitly identifying and exposing commonality across cases, or lifting the reasoning or communication to a level where the focus is no longer on the cases or situation themselves but rather on the patterns, procedures, structures, and the relationship across and among them» (s. 136).

«Å generalisere et figurmønster algebraisk betyr å finne et generelt uttrykk for antallet komponenter i et vilkårlig element i mønsterfølgen, forstått som en formel for antallet komponenter i det n-te elementet, uttrykt ved hjelp av n» (Strømvåg, 2017, s. 73).

Løsningsstrategi som ikke innebærer generalisering

Løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering er forskjellige fra «generaliseringsstrategier». De innebærer anvendelse av bestemte metoder eller tilnærminger for å løse oppgaver eller problemer, uten å nødvendigvis formalisere bruken av generalisering og hensiktsmessige representasjoner. Eleven evner ikke å oppdage sammenhengen og strukturen i oppgaven. Eksempler på en «løsningsstrategi som ikke innebærer generalisering» vil bli presentert i kapittel 4 «Resultater og analyse».

2.3. Algebra

Algebra har blitt et stort og viktig tema innen matematikken, som mange elever har problemer med å forstå hva algebra egentlig innebærer. «Matematikeren Al-Khowarizmis var tidlig ute (det niende århundre) med å knytte algebra opp til ligninger» (Hinna, Ringvold & Gustavsen, 2016, s. 167). I dette avsnittet vil jeg forklare hva *algebra* innebærer, og påpeke at algebra innebærer mer enn bare ligninger. Videre skal jeg beskrive hvorfor algebra er og har blitt et viktig og sentralt tema innen matematikken. Avslutningsvis vil jeg presentere hva *algebraisk tenkning* går ut på i lys av ulike teoretikere.

Som tidligere nevnt indikerer undersøkelser at norske elever scorer svakt i algebra i hele det norske utdanningssystemet, men spesielt elever ved 8.trinn har store utfordringer med forståelsen av algebra (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 54). Da disse resultatene kom var ikke algebra en del av kompetansemålene i læreplanen før 10.trinn. De svake resultatene innen algebra har likheter til resultatene fra TIMSS undersøkelsene i 2015 og 2019 (Kaarstein et al., 2020). Som et resultat av de svake resultatene har algebra gradvis fått større plass i matematikken. I LK06 var «tall og algebra» et av hovedområdene for 5.-10. trinn, og i dag er algebra et av de matematiske kunnskapsområdene i den nye læreplanen, LK20.

I skolesammenheng har algebra handlet mye om symboler og symbolers bruk for å uttrykke og manipulere variabler og formler (Mason, 1996, s. 73). Selv om algebra tilknyttes manipulering av variabler og formler, er algebra mer enn dette. Manipulering av variabler er bare en liten del av algebraen. Mason et al. (2011) beskriver skolealgebraen på følgende måte: «Skolealgebraen handler om å uttrykke generalitet, og om å utvikle mestringsfølelse for manipulering av disse generalitetene» (s. 368). At algebraen utvikler seg innebærer at algebraen er et manipulert språk som brukes for å beskrive generalitet i sammenhenger. Utdanningsdirektoratet (2020) mener algebra handler om «å utforske strukturer, mønstre og relasjoner og er en viktig forutsetning for at elevene skal generalisere og modellere i matematikken».

«Å bruke algebra som språk går ut på at elevene aktivt bruker algebraens symboler for å presentere meningsfulle matematiske påstander» (Hinna, Ringvold & Gustavsen, 2016, s. 174). På den måten vil eleven bli tvunget til å tenke rundt algebraens symboler og ideer, samt utfordre kreativiteten sin. Duval (2006) hevder at overgangen fra språket til symbolsk språkbruk er krevende i matematikken. Her får han støtte av Amit og Nera (2004) som forteller at elever i matematikken sliter med å forstå symbolene og hva de representerer.

Lee (1996) velger å se på algebra som en minikultur, og sammenligner algebra med kulturen for amerikansk fotball. Lee (1996) skriver «one finds a community of people who share the same language (also relying a lot on visual codes, particularly in drawings of play strategies), rules, mode of relating to each other, beliefs in their own superiority and the ultimate importance of the game» (s. 87). Videre velger Lee (1996, s. 87) å se på algebra som integrering av ett sett av aktiviteter, språk og alle de metaforiske måtene å definere algebra. Så dersom man skal se på algebra som en kultur, mener Lee (1996) at generalisering av figurmønster er en sentral aktivitet og det symbolske språket til algebra forenkler oppgaver.

2.3.1 Algebraisk tenkning

I dette avsnittet vil jeg presentere ulike forskeres oppfatning av algebraisk tekning.

Mason et al. (2011) forstår algebraisk tenkning på følgende måte:

> «Å tenke algebraisk (spesielt å kjenne igjen og utrykke generelle trekk) er innen rekkevidde for alle som lærer. Det er vitalt for alle som skal ta full del i samfunnet. Alle som begynner på skolen har vist at de takler det å tenke algebraisk og at de kan se verden på en matematisk måte. De har alene og sammen med andre generalisert og uttrykt generelle sammenhenger. Det de trenger er oppmuntring og mulighet til å utvikle disse egenskapene i et støttende miljø» (s. 8).

Mason et al. (2011) bruker navnet «høyere algebra» ved algebraisk tenkning. Videre beskriver de algebraisk tenkning på følgende måte: «[… den «høyere algebra» strukturen, som dukker opp når en generaliserer tallene, som plassholdere for selve tallene» (Mason, Graham, Johnston-Wilder, 2011, s. 369). Slik struktur innebærer både objekter og operasjoner på disse objektene, på like måte som aritmetikken innebærer tall og operasjoner av de fire grunnleggende regneartene.

Radford (2006) hevder at algebraisk tenkning handler om å kunne bruke symboler og regler slik at det gir mening og åpner for generalisering. Han hevder at algebraisk tenkning kan hjelpe elever å generalisere mønster, og utforske matematiske ideer dypere og mer abstrakt (Radford, 2006). Ved å tenke algebraisk vil elevene utvikle en bedre forståelse av matematikken (Radford, 2006). Radford (2006; 2010) er opptatt av at bruken av symboler og tegn har en betydning for elevers algebraiske tenkning. Han mener at elever som er bedre rustet til algebraisk tekning har forståelse for bruken av symboler og tegn i matematiske ideer og relasjoner (Radford, 2006).

Zazkis og Liljedahl (2002) mener at algebraisk tenkning handler om å generalisere mønstre og regler, og at elever må mestre arbeid med symboler og notasjon på en effektiv måte. Videre mener de at notasjon i algebraisk tenkning kan gi eleven en presis og effektiv måte å representere og kommunisere matematiske ideer, men også være kompliserende og forvirrende (Zazkis & Liljedahl, 2002). Lannin (2005) mener at symbolsk notasjon kan være med å hjelpe elevene med å utvikle den algebraiske tenkning. MacGregor og Stacey (1997) fant ut at elever i 13-15 års alderen ikke evnet å håndtere oppgaver som krevde tolkning av bokstaver som generaliserte tall eller ukjente. Videre fant de ut at elever som er uvant med matematisk notasjon kan være uvitende om notasjonens konsekvente og systematiske struktur (MacGregor & Stacey, 1997, s. 15). Det vil si elevens potensiale for presist språk av matematiske ideer på en effektiv måte gjennom matematiske symboler og notasjoner. Amit og Nera (2004) påpekte at elevene var i stand til å gjenkjenne og fullføre figurmønstre, men hadde vanskeligheter med å uttrykke overgangen mellom figurene ved en formel til en vilkårlig n.

2.4 Generaliseringsstrategier av figurmønstre

I dette avsnittet skal jeg beskrive noen av generaliseringsstrategiene som ulike forskerne har funnet. Jeg vil beskrive de ulike generaliseringsstrategiene i stigende grad av generalitet. Ved presentasjonen av generaliseringsstrategiene har jeg valgt å bruke det engelske navnet for generaliseringsstrategiene av to grunner. Den første grunnen er fordi det engelske navnet gir best beskrivelse av generaliseringsstrategiene. Hadde jeg oversatt noen av generaliseringsstrategiene ville det gitt feil inntrykk av hva strategien handlet om og oversettelsene ville kanskje skapt forvirringer. Den andre grunnen for at jeg bruker det engelske navnet for generaliseringsstrategiene er fordi det er lettere å forbinde generaliseringsstrategiene med forskningslitteraturen. Avsnittet vil avslutte med å en oversikt over løsningsstrategier som har lik betydning, men forskjellige navn.

2.4.1 Generaliseringsstrategier

I dette avsnittet vil jeg gjøre rede for generaliseringsstrategier som andre forskere har beskrevet. Generaliseringsstrategiene er plassert hierarkisk, og bygd opp i stigende grad av generalitet. Ved plasseringen av generaliseringsstrategiene har jeg latt meg inspirere av Radfords (2006) tabell av kategorier til generaliseringsstrategier; *naive induction, arithmetic generalization* og *algebraic generalization. Naive induction, arithmetic generalization* og *algebraic generalization* vil bli beskrevet detaljert i kapittel 2.4.2 «Samme generaliseringsstrategi, men forskjellig navn».

Counting

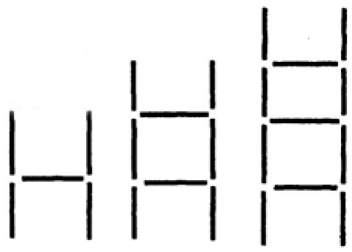
Stacey (1989) beskriver *counting* som en generaliseringsstrategi som går ut på å tegne en tegning, og telle antall elementer fra tegningen. Dette kan gjøres ved å tegne figur nr.5 fra figur 2.6, og telle antall kvadrater ut i fra tegningen.

Trail and error

I Rivera og Becker (2005) beskrives «trail and error» som en tilnærming der en formel eller reglen blir laget uten å forstå hvorfor den fungere, og deretter sjekke om formelen er funksjonell.

Difference Metode

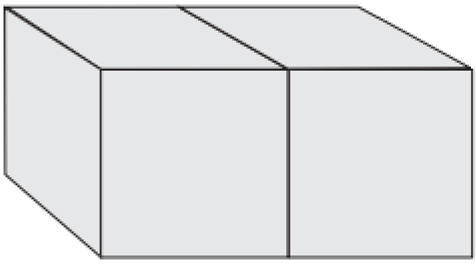
Difference metode går ut på å multiplisere hvert ledd med et fast tall, altså den faste differansen (Stacey, 1989). Ta utgangspunkt i Stacey (1989) sin stige-oppgave (figur 2.1). Der vil den faste differensen mellom hver «stige» være tre, og man må addere med tre hvert ledd slik at formelen blir $M(x) = 3 * x$. (Stacey, 1989). I dette tilfellet vil formelen gi et ukorrekt svar. Stacey (1989) argumenterer for at det kan være utfordrende å bruke «difference metode» på figurfølger, spesielt når mønsteret har et konstantledd.



Figur 2.1: Stige oppgaven fra Stacey (1989, s. 150)

Whole-object generalization

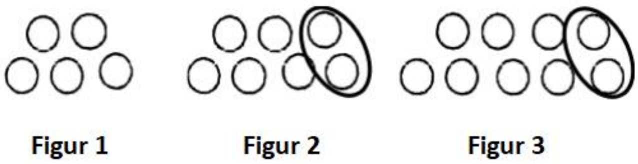
Whole-object generalization defineres ved å bruke en del av figuren for å konstruere større figurer ved å multiplisere. Jeg tar utgangspunkt i «kube problemet» (se figur 2.2) for å forstå «whole-object generalization». En som bruker denne generaliseringsstrategien vil tenke at en lengde på 20 vil ha 84 klistremerker dersom en lengde på 10 har 42 (Lannin et al., 2006). Dette eksemplet gir feil svar.



Figur 2.2: "kube problemet" hentet fra Lannin, Barker & Townsend (2006, s. 5)

Recursive generalization

Recursive generalization handler om å finne noe som er felles for alle figurene, men ikke finne en eksplisitt regel (Lannin, 2005; Radford, 2010). Eksempel på «recursive generalization» illustreres i figur 2.3, der man oppdager en økning på sirkler i hver figur.



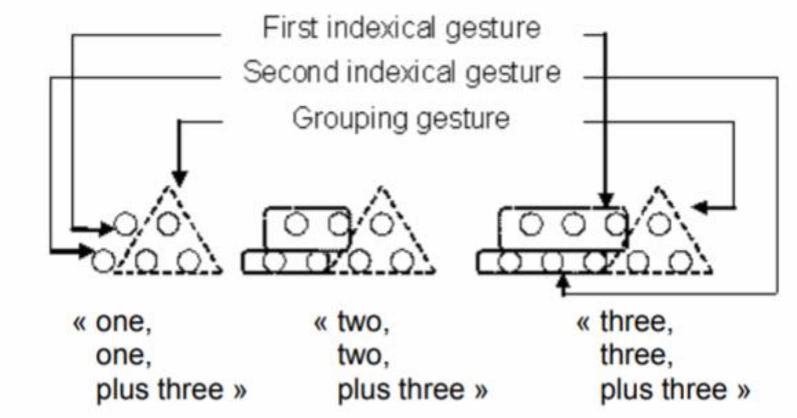
Figur 2.3: Recursive generalization hentet fra Radford (2010, s. 43)

Chunking

Chunking innebærer å bygge på et rekursivt mønster, ved å bygge en enhet på kjente verdier for ønsket egenskaper (Lannin et al., 2006, s. 6). Ta utgangspunkt i «kube problemet» (se figur 2.2). Beregningen for en stang med lengde 15, basert på informasjonen om at en stang med lengde 10 har 42 klistremerker og at antall klistremerker øker med fire for hver lengdeøkning, kan uttrykkes på følgende måte: $42 + 5 * 4$.

Factual generalization

Factual generalization går ut på finne likheter i figurmønsteret, og beskrive oppbygningen av figurmønsteret gjennom ord, rytme og gester. Basert på beskrivelsen av mønsteret vil det være mulig å finne antall objekter i hvilken som helst figur, men ikke utarbeide en eksplisitt formel (Radford, 2010, ss. 47-50). Eksempel på «factual generalization» illustreres ved figur 2.4.
Ved utgangspunkt i figur 100 vil eleven forklare på følgende måte: «hundre, hundre, pluss tre, som vil bli 203».



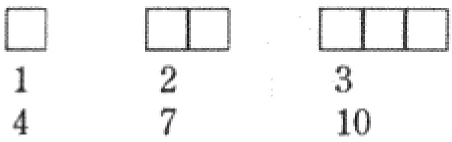
Figur 2.4: Factual generalization (Radford, 2010, s. 50)

Contextual generalization

I *contextual generalization* tar man et skritt videre fra «factual generalization». *Contextual generalization* innebærer å bruke språket uten rytme og gester for å forklare det konkrete ved mønsteret til figurene. Gjennom contextual er det mulig å snakke om en bestemt figur, og de neste figurene (Radford, 2010). Eleven formulerer det faktuelle handlingsmønstret i skriftlig språk.
Jeg tar utgangspunkt i figur 2.4 for å beskrive «contextual generalization». En som bruker generaliseringsstrategien «contextual generalization» vil beskrive handlingsmønsteret på følgende måte: «jeg dobler figurnummeret og legger til tre» (Radford, 2010).

Generalizing numerically

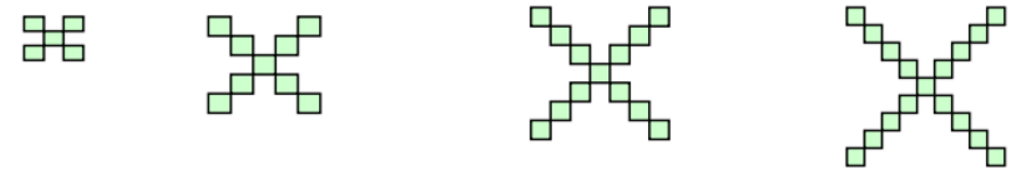
Generalizing numerically innebærer å ta utgangspunkt i tallene fra figurmønsteret for å lage en formel (Becker & Rivera, 2006; Rivera & Becker, 2005). Jeg tar utgangspunkt i figur 2.5 for å forklare «generalizing numerically». Generaliseringsstrategien fokuserer på tallene 4, 7, 10 istedenfor figurmønsteret. En illustrasjon på en elevs evne til å lage en formel fra figur 2.5 er gjennom oppdagelsen av tallsekvensen 4, 7 og 10, som er én mer enn tre-gangen. Dette vil gi formelen $3n + 1$.



Figur 2.5: figurmønster hentet fra Rivera & Becker (2005, s. 199)

Generalizing figurally

I motsetning til «generalizing numerically» som tar utgangspunkt i tallene, så fokuserer *generalizing figurally* på figurene og deres egenskaper. Med utgangspunkt i figurene klarer eleven å beskrive mønstret sin struktur som gjelder alle figurene i figurmønsteret og utarbeide en eksplisitt formel eller regel. En mate å beskrive generaliseringsstrategien, som tidligere var presentert av Rivera og Becker (2005), ble senere tydeliggjort av Becker og Rivera (2006). Becker og Rivera (2006) beskriver «generalizing figurcally» på følgende måte: «Individuals who are predominantly figural generalizers are capable of justifying their generalizations non-inductively and in other valid ways due, in part, to the manner in which they are able to connect their symbols and variables to the patterns that generate the figures» (s. 466).
I figurmønsteret til figur 2.6 vil en elev som benytter generaliseringsstrategien «generalizing figurally» kunne observere at hver figur består av fire armer og et kvadrat i midten. Formelen blir da $4n + 1$.



Figur 2.6: Figurmønster hentet fra Becker & Rivera (2006, s. 467)

Symbolic generalization

Radford (2010) beskriver symbolic generalization på følgende mate: «expressing the generalization through alphanumeric symbols» (s.53). Symbolic generalization innebærer å utarbeide en formel ved å bruke både bokstaver og tall. Et eksempel kan være formelen for figurmønsteret for i figur 2.3 og figur 2.4 fra Radford (2010), som vil bli $2n + 3$.

2.4.2. Samme løsningsstrategi, men forskjellig navn

I arbeid med å forstå løsningsstrategiene forsøkte jeg å identifisere like løsningsstrategier, men som har forskjellige navn. Jeg vil i dette avsnittet identifisere og beskrive løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering, generaliseringsstrategier og hovedkategorier av generaliseringsstrategier fra forskjellige forskere. Deretter sammenligne disse kategoriene med hverandre og andre typer løsningsstrategier.

Et eksempel er Rivera og Becker (2005) sin beskrivelse av «trail and error» og Lannin (2005) sin definisjon av «guess and check». Begge løsningsstrategiene innebærer å gjette en formel uten å vite hvorfor den funger, og sjekke etterpå. Radford (2006) kategoriserer «trail and error» og «guess and check» som en induksjon, ettersom eleven ikke generaliserer noe, men kun gjetter. Naive induction er den laveste graden av generalitet hos Radford (2006) og er basert på gjetting og hypoteser. Videre forklarer Radford (2006) «naiv induksjon» på følgende måte:

> «This way of reasoning works on the basis of probable reasoning whose conclusion goes beyond what is contained in its premises. In more precise terms, it is a type of induction a type that I will qualify as naïve to distinguish it from other more sophisticated types of induction» (s. 4).

Eleven vil ikke generalisere noe, men gjøre en induksjon.

Et annet eksempel er Lannin's (2005) definisjon av «whole-object generalization» med English og Warren (1998) sin beskrivelse av generaliseringsstrategien *forholdsstrategi*. Elever som benytter forholdsstrategi starter med å ta utgangspunkt i en figur fra et figurmønster og trekker en generell slutning basert på verdien av figuren.
Det tredje eksemplet går ut på at Radford (2010) beskriver generaliseringsstrategien «recursive generalization» på en tilnærmet lik måte som English og Warren (1998) beskriver generaliseringsstrategien *additiv strategi*. Begge generaliseringsstrategiene innebærer å finne en felles økning i mønsteret.

Det fjerde tilfellet er Radford's (2010) beskrivelse av hovedkategorien *arithmetic generalization* og en av Lannins' (2005) hovedkategorier *non-explicit*. Non-explicit innebærer å ha en forståelse av mønstret og egenskaper ved figurene, som ikke nødvendigvis kan uttrykkes eksplisitt i form av en matematisk formel. Det kan oppfattes som intuitiv forståelse av tall- og mønsterforståelse (Lannin, 2005). Denne beskrivelsen har en likhet til hovedkategorien *arithmetic generalization*. Radford (2010, s. 47) viser til to kriterier for å definere hovedkategorien *arithmetic generalization*. Det første kriteriet er å oppdage en likhet i oppbygningen av noen figurer. Det andre kriteriet er å danne en generell forståelse ved å generalisere den likheten til alle figurene i mønsteret. Felles for «non-explicit» og «arithmetic generalization» er at begge hovedkategoriene skaper en forståelse for figurene i mønsteret, men ikke uttrykker en eksplisitt formel.

Det femte eksempelet er Lannin et al. (2006) sin beskrivelse av generaliseringsstrategien *explicit* og Becker og Rivera (2006) sin definisjon av «generalizing figurally». Lannin et al. (2006) beskriver generaliseringsstrategien *explicit* på følgende måte: «A rule is constructed that allows for immediate calculation of any output value given a particular input value» (s. 6). Generaliseringsstrategien «explicit» handler om å utvikle en matematisk regel som kan brukes til å finne hvilken som helst verdi basert på en gitt inngangsverdi. Typisk for «generalizing figurally» er at generaliseringsstrategien omfatter generalisering med og uten algebraiske symboler med utgangspunkt i alle figurene i mønsteret. Siden forskjellene er marginale, og begge generaliseringsstrategiene har samme «mål», har jeg valgt å kategorisere de som samme generaliseringsstrategi.

Sammenligningen av generaliseringsstrategien «explicit» av Lannin et al. (2006) og Becker og Rivera (2006) sin beskrivelse av «generalizing figurally», kan også sammenlignes med Lannin's (2005) definisjon av hovedkategorien *explicit*. Lannin (2005) beskriver hovedkategorien *explicit* på følgende måte: «explicit strategies that allowed for the direct calculation of a particular value of the dependent variable given a value of the independent variable» (s. 234). Det vil si at de eksplisitte strategiene gjør det mulig med en direkte beregning av antall elementer i en bestemt figur i figurmønsteret, slik som generaliseringsstrategiene «explicit» og «generalizing figurally».

Radford (2006) beskriver hovedkategorien *algebraic generalization*. Algebraic generalization oppfyller begge kriteriene til arithmetic generalization. Forskjellen mellom arithmetic generalization og algebraic generalization er at algebraic generalization så evner man å utarbeide generelle regler for hvilket som helst tall- og figurmønster. Radford (2010) påpeker at algebraic generalization krever en dyp forståelse av de underliggende matematiske prinsippene, og sammenhengene som ligger til grunn for de algebraiske uttrykkene og notasjonene som brukes. Videre understreker Radford (2010) at elevene lærer å se algebraisk notasjon som et språk for matematikken, og at elevene kan bruke språket for å kommunisere og løse matematiske problemer på en effektiv måte. Radford (2006) sin beskrivelse av «algebraic generalization» kan sammenlignes med generaliseringsstrategiene «generalizing figurally» og «explicit», og hovedkategorien til Lannin (2005) «explicit».

Den tredje generaliseringsstrategien English og Warren (1998) skriver om er generaliseringsstrategien *søk etter et funksjonelt forhold*, som innebærer at eleven forsøker å formulere et uttrykk som etablerer en likhet mellom figurtallet og verdier av figuren, og resulterer typisk i et uttrykk som inneholder algebraisk notasjon. English og Warren (1998) sin beskrivelse av «søk etter et funksjonelt forhold» kan sammenlignes med Radford (2010) sin beskrivelse av generaliseringsstrategien «symbolic generalization» og hovedkategorien «algebraic generalization» til Radford (2006). English og Warren (1998) legger allikevel vekt på at det ikke er et krav om algebraisk notasjon i «søk etter et funksjonelt forhold», men at eleven må vise at hen evner å formulere et generelt argument for et figurmønster ved å vise til ulike deler av figurene med figurtallet og gi en begrunnelse. Dette kan også minne om Radford (2006) sin beskrivelse av «arithmetic generalization».

2.5. Tidligere forskning av generalisering av figurmønster

I dette avsnittet vil jeg gjøre rede for tidligere forskning av teoretikers funn av generalisering av figurmønstre. Det er begrenset mengde forskning på generalisering av figurmønstre spesielt rettet mot åttendeklassinger, men mye forskning omkring generalisering av figurmønstre. Jeg vil derfor presentere et lite utvalg av funn fra tidligere forskningen i lys av enkelte forskere.

Lannin (2005)

Lannin (2005) skriver at figurmønster anbefales for elever ved introduksjon til algebra. Figurmønster gir en kontekst, og ber elevene generalisere en regel eller regler som kan brukes til å bestemme andre spesielle enkelttilfeller av mønsteret. Forskning har vist at figurmønster kan oppmuntre elevene til å lage generaliseringene sine (Lannin, 2005, s.233). Videre skriver Lannin (2005) at generalisering ikke kan skilles fra begrunnelse, og deretter henviser til Radford (1996): «Generalization as a didactic device cannot aviod the problem of validity, and validty it in itself a very complex idea» (sitert i Lannin, 2005, s. 235). Elever kan møte på utfordringer når de går fra å fokusere på spesifikke eksempler til å skape generaliseringer, og ikke forstår sammenhenger mens de utvikler algebraisk forståelse gjennom figurmønster (Lannin, 2005). Generalisering kan være en nyttig pedagogisk strategi, men kan møte på komplikasjoner i form om generaliseringen er gyldig og riktig. At generaliseringen er gyldig vil si at den gjelder og er relevant for alle situasjoner og eksempler. Dette kan være en komplisert oppgave (Lannin, 2005). Lannin (2005) konkluderer med at elevens forståelse av gyldighet av deres generalisering er avgjørende når en bruker figurmønster i klasserommet. Når elever blir bedt om å generalisere figurmønster i matematikken, vises ofte kompetansen ved å lage en rekke generaliseringer og bruker forskjellige generaliseringsstrategier (Lannin et al., 2006, s. 4). Denne kompetansen indikerer at elever evner å analysere oppgaver i forskjellige settinger.

Flere forskere støtter Lannin’s (2005) syn på at mønsteraktivitet kan egne seg som en introduksjon til algebra. I de påfølgende avsnittene vil forskernes perspektiver på Lannin’s 82005) syn på at mønsteraktivitet kan være en passende introduksjon til algebra bli beskrevet nærmere.

Lee (1996)

Lee (1996) hevder at generalisering er en av de viktigste kompetansene innen algebra, og at generalisering av figurmønster bør oppmuntres i tidlig alder. Mason (1996) mener at generalisering er hjerteslagene til matematikken som kommer i mange former. Han mener at dersom læreren ikke er bevisst på generaliseringens betydning, og ikke lar elevene få jobbe med å uttrykke sine egne generaliseringer, så finner ikke matematisk tenkning sted (Mason, 1996).

Et av hovedproblemene med mønsteraktivitet i matematikken for elevene var ikke å finne mønsteret, men å oppfatte mønsteret algebraisk. Evnen til å oppfatte et mønster algebraisk er å kunne se en likhet i en av figurene ved mønsteret, og kunne forstå at likheten gjelder alle

figurene i mønsteret (Lee, 1996). På den måten vil elevene kunne klare å lage et uttrykk eller formel for mønsteret. Å kunne se mønsteret på flere måter er en egenskap som var ønsket å utvikle, slik at eleven kunne oppfatte mønsteret algebraisk.
Lee (1996, s. 95) påpekte videre at elever har vanskeligheter med å endre sin opprinnelige oppfatning etter at mønsterets oppbygning er oppdaget. Eksempel illustreres ved kartleggingsoppgave 2 (figur 3.2). En elev som bruker «recursive generalization» for å oppdage mønsteret (figur 2.5) vil ifølge Lee (1996) ha vanskeligheter med å endre sin oppfatning av mønsteret. En annen forståelse av mønsteret er ved å se på situasjonen der den øverste rekken med sirkler har en sirkel mer enn figurnummeret, mens den nederste rekken har to sirkler mer enn figurnummeret.

Radford (2010)

Radford (2010) mener at generalisering av mønster regnes som en av de mest fremtredende måtene å introdusere algebra til elever, men at ikke alle generaliseringer er algebraiske (s. 37). Det vil si at det er mulig å generalisere figurmønster på ulike måter som ikke nødvendigvis innebærer bruk av algebraiske uttrykk eller symboler. Radford (2010) mener at strategier som krever gjetting, for eksempel «trail and error» ikke leder til algebraisk tenkning. Videre påpeker Radford (2010) «these procedures do not lead to algebra because algebra is certainly neither about guessing nor about just using signs» (s. 55). Han legger vekt på at dersom lærere skal bruke figurmønster som en vei til algebra, må lærere ha tilstrekkelige pedagogiske strategier for å få elevene til å engasjere seg i mønsteroppgaver (Radford, 2010, s. 4).

Til slutt mener Raford (2010) at det er en sammenheng mellom språket og generalisering av figurmønster. Raford (2010) argumenterer for at språkets struktur og muligheter for abstraksjon og generalisering påvirker hvordan elevene forstår og behandler mønstrene. Bruk av algebraiske symboler kan for eksempel bidra til å klargjøre mønstrenes beskrivelse og dermed gjøre det lettere for elevene å foreta generalisering. Videre kan lærerens språkbruk, for eksempel spørsmål som oppfordrer eleven til å tenke abstrakt og generalisere, også ha en påvirkning på elevenes evne til å generalisere (Radford, 2010).

Andre forskere

Zazkis og Liljedahl (2002) er enig med Lee (1999) og Radford (2010) om at å legge merke til mønstre i matematikken er anerkjent for sin betydning, som en innføring til algebra. De påpeker også betydningen av elevenes bevissthet rundt figurmønstre når det gjelder introduksjonen til formell algebra (Zazkis & Liljedahl, 2002, s. 382).
Vale og Cabrita (2008, s. 63) mener at lærere bruker figurmønster som et verktøy ved

prealgebra for å fremme generaliseringen. Videre påpekte de: «if algebra is a tool for expressing generalities, exploring patterns in the elementary levels lay the foundation for the algebraic reasoning» (Vale & Cabrita, 2008, s. 63). Stacey (1989) hevder at det kan være nyttig å bruke flere forskjellige generaliseringsstrategier samtidig for å generalisere figurfølger for å oppnå et høyere nivå av generalitet, spesielt når figurene i følgen er mer komplekse og varierte. Videre påpeker Stacey (1989) at det kan være nyttig å bruke flere forskjellige strategier samtidig for å generalisere figurfølger med høyere nivå av generalitet, spesielt når figurene i følgen er mer komplekse og varierte.

3. Metode

I denne studien har jeg undersøkt hvilke løsningsstrategier elever på 8.trinn tar i bruk til oppgaver med figurmønstre. For å besvare forskningsspørsmålet mitt vil jeg starte med å beskrive hvordan en kvalitativ tilnærming med bruk av videoobservasjon og et semi-strukturert forskningsintervju er passende for studien min. Videre vil jeg beskrive utvalget av klasse, elever og kartleggingsoppgaver med utgangspunkt i relevant teori. Etter jeg har presentert utvalget vil jeg forklare gjennomføringen av studien og metoden for analysen. Avslutningsvis vil jeg gjøre rede for studiens kvalitet, i form av studien pålitelighet, gyldighet og etiske valg.

3.1 Forskningsdesign

Hensikten med studien er å finne ut hvilke løsningsstrategier elever på 8.trinn tar i bruk til oppgaver med figurmønstre. Dessuten ønsker jeg å se på hvor ofte elevene bruker de ulike løsningsstrategiene i form av «generaliseringsstrategier» og «løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering» med utgangspunkt i kartleggingsoppgavene. Studien vil ha en kvalitativ tilnærming der jeg bruker videobservasjon og et semi-strukturert forskningsintervju for å besvare forskningsspørsmålet mitt. Videobservasjonen vil foregå i grupper på 3 elever. Intervjuene vil bli videofilmet og gjennomført etter videoobservasjonene, og individuelt. Utvalget av elever vil bestå av 6 elever fra samme skole på 8.trinn. De utvalgte elevene vil representere et bredt spekter av faglige prestasjonsnivåer innen matematikk. Både videoobservasjonen og intervjuene vil bli gjennomført på elevenes skole. Etter gjennomføringen vil dataene bli transkribert og kodet inn i kategorier, som står mer detaljert beskrevet i kapittel 4 «Resultater og analyse».

3.2 Kvalitativ metode

I studien min har jeg valgt å bruke et kvalitativt forskningsdesign. Kvalitative forskningsdesign handler om «å samle inn data først og fremst i form av ord som er rettet for å beskrive og forstå menneskers handlinger og meningsskaping i deres naturlige kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113). I kvalitative forskningsdesign fokuseres det ofte på få deltakere, slik at funnene blir detaljert og rik (Cohen, Manion & Morrison, 2011, s. 461). Hensikten med studien min er å finne ut hvilke løsningsstrategier elevene bruker, og av den grunn er jeg avhengig å få data som er detaljert og beskriver elevenes handlinger. Ved å fokusere på få deltakerne vil jeg komme tett på deltakerne, slik at prosessen kan oppleves fengende, motiverende og intens. Jeg valgte å ta i bruk videointervju og videoobservasjon for å skape en helhetsforståelse av elevenes løsningsstrategier. Videre i dette avsnittet vil jeg beskrive hva videoobservasjon og videointervju innebærer, og hvorfor metodene er hensiktsmessige for min studie.

«I og med at det epistemologiske ståstedet i kvalitativ forskning er at kunnskap skapes i møte med forsker og forskningsdeltakere, er ikke observasjon en tilstrekkelig måte å samle inn datamateriale på dersom den blir benyttet alene» (Postholm & Jacobsen, 2018, s.114). En av grunnene til at jeg valgte å gjennomføre videoobservasjon og intervju er på grunn av forskeren vil ha en viss subjektivitet og antakelse under kvalitativ observasjon. Observasjon og intervju vil gi forskeren utfyllende materiale til datainnsamlingen i kvalitativ forskning, slik at en intersubjektiv kunnskap og forståelse kan konstrueres mellom forsker og forskningsdeltaker (Postholm & Jacobsen, 2018, ss. 114-115). Kombinasjonen av observasjon og intervju kan bidra til *kontekstuell informasjon*. Det vil si at informasjonen forskeren får kan bidra til å forstå situasjonen bedre, og gi dypere innsikt i forskning. Eksempelvis kan deltakerens kroppsspråk, sosiale kontekst eller andre relevante faktorer gi bedre kunnskap om eleven. Postholm og Jacobsen (2018) skriver at «Observasjoner kan bidra med informasjon til kommende intervju, og intervju til kommende observasjon» (s. 115). Av den grunn valgte jeg å bruke videoobservasjon og et semi-strukturert intervju som forskningsmetoder til studien min.

3.2.1. Videoobservasjon

I følge Adler og Adler (1994, sitert i Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113) er «observasjon den mest fundamentale måten å samle inn data på». Observasjon handler om å observere et visst utvalg av informanter ut i fra hva som skjer og blir sagt, men også stille spørsmål og samle inn empirisk materiale for å kaste lys over temaene som er fokus for forskningen (Hammersley & Atkinson, 1995: 1, sitert i Tjora, 2021, s. 60). Jeg valgte å bruke videoobservasjon istedenfor observasjon fordi jeg ønsket å gå inn i detaljer ved forskningen.

I følge Heath mfl. (2010, sitert i Tjora, 2018, s. 116) har videoobservasjon vært lite benyttet i samfunnsvitenskapene, men blitt mer utbredt innenfor enkelte forskningsdisipliner. Til tross for at videoobservasjon ikke en godt utbredt metode, så ønsket jeg å bruke videoobservasjon siden det skal gi forskeren detaljerte analyser og en rekke fordeler. Videobservasjon brukes for å se på deltakernes handling og samling, som er ikke-tolket. Det vil si at forskeren kan samle inn datamateriale på en objektiv måte, og ikke gi sin egen tolkning av hva som skjer på videoen. Forskeren registrerer det som faktisk har skjedd.

En styrke er at videoobservasjon gir verifiserbar dokumentasjon, da hendelser kan avspilles flere ganger (Tjora, 2021). Tjora (2021) påpeker at «det virkelig store potensialt med videodata ligger i muligheten til å se på opptak i ettertid, kontrollere egne inntrykk og notater, gjenoppleve fenomener som man har observert, samtidig oppdage nye fenomener som kanskje har vært for «små» til å legges merke til i selve observasjonssituasjonen» (s. 188). Det finnes mange fordeler med å bruke videoobservasjon som datainnsamling, men også ulemper. En fordel med videoobservasjon er at video kan finleses ved å fryse situasjoner eller spille video i ønsket tempo for å avdekke mønster. Tjora (2021) påpeker fordelen «bruk av video i datagenereringen er at man har en detaljert ikke-tolket gjengivelse av det som skjer i en relevant (sosial) situasjon. Man kan sammenstille disse opptakene med de notater man har gjort seg som observatør i samme situasjon» (s.117). Videoobservasjon gir muligheter for å oppdage nye funn som har vært for «små» til å bli oppdaget under observasjonen. Dette gir også mulighet for en mer presis beskrivelse ved at man etter observasjonen kan sjekke ord, uttrykk og argumenter med aktører som har relevant fagkunnskap (Tjora, 2021).

Videoobservasjon kan være et nyttig verktøy i studier der observatøren er fremmed for elevene, som gir muligheten til å samle data på en objektiv måte uten å påvirke elevenes oppførsel. Dette er et sentralt element som bør tas i betraktning i valg av bruk av videoobservasjon som forskningsmetode. Over en relativ kort periode får man samlet inn store mengder data, som vil kreve en detaljert og intensiv analyse (Tjora, 2021, s. 119). Dette vil bli gjort rede for i kapittel 3.6 «Kvalitativ teoridrevet videoanalyse».

3.2.2. Semi-strukturert forskningsintervju

Etter videoobservasjonene ble det gjennomført intervjuer. Intensjonen med forskningsintervjuene var «å utvikle kunnskap innenfor en bestemt tematikk for å besvare problemstillingen og forskningsspørsmålene fra studien» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 117). Forskningsintervjuer gir forskeren mulighet til å gå dypere i tematikken enn den spontane hverdagstematikken, og det finnes ulike former for intervju som det narrative, strukturerte-, det ustrukturerte- og det semi-strukturerte intervjuet (Postholm & Jacobsen, 2018). I studien min ble det gjennomført et semi-strukturert intervju.

Et semi-strukturert intervju tar opp hverdagslige temaer, men har et spesifikt formål med intervjuet. Målet med et semi-strukturert intervju er å forstå deltakernes perspektiv. Det som gjør denne formen for intervju til et semi-strukturert forskningsintervju er at intervjuet verken er en åpen samtale eller en lukket spørreskjemasamtale. Kvale & Brinkmann (2015) beskriver et semi-strukturert forskningsintervju på følgende måte: «en planlagt og fleksibel samtale som har som formål å innhente beskrivelser av intervjupersonens livsverden med henblikk på fortolkning av mening med de fenomenene som blir beskrevet» (s. 357). I studien min er ikke hensikten med forskningsintervjuet å se på elevens beskrivelse av livsverden, men hvordan elevene tolker kartleggingsoppgavene og beskriver tolkningen.

Med utgangspunkt i Kvale & Brinkmanns (2015) definisjon av semi-strukturert intervju passet denne formen for intervju med mine valg av intervjuform. Intervju alene er allikevel ikke tilstrekkelig for datainnsamlingen. En teknisk utfordring ved videoobservasjon er behandlingen (redigering, utplukking av ekstrakter) av data for analysen, og at det har sine begrensninger ved at den ikke fanger opp alt som kan til å skje (Tjora, 2021, ss. 123-124).. Med tanke på at et semi-strukturert intervju ifølge Kvale og Brinkmann (2015) har fokus på hverdagslige temaer, valgte jeg å supplere videoobservasjon med intervju for å få tilgang til informasjon som kameraet ikke kunne registrere. Videre var elevenes evne til å generalisere figurmønstre en sentral og viktig del av studien min innen matematikkfaget.

I denne formen for intervju foregår en kontinuerlig analyse. Dette bidrar til at forskeren vil stiller ulike spørsmål til det som blir sagt, for virkelig å kunne analysere handlinger og tanker som bringes frem i intervjuet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 121). Etter intervjuene ble intervjuene transkribert, og den skrevne teksten og lydopptakene utgjorde sammen materialet for den etterfølgende videoanalysen (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 46). Intervjuer vil ofte være viktig materiale for analysen (Kvale & Brinkman, 2015, s. 46).

3.3. Valg av klasse og elever

I dette avsnittet vil jeg gjøre rede for utvalget av klasse og elever med hensikt i studiens forskningsspørsmål. Studien min var avhengig av at elevene skulle ha om algebra og figurmønster, og av den grunn var det viktig for meg å finne et klassetrinn som egnet seg for forskningsspørsmålet. Temaet «figurmønster» tar ikke stor plass i kompetansemålene og læreplanen i matematikk, men kan være en fin introduksjon for eleven i møte med pre-algebra. På barneskolen tar ingen kompetansemål for seg temaet figurmønster. Kompetansemålet «bruke sammensatte regneuttrykk til å beskrive og utføre utregninger» fra 7.trinn var kompetansemålet som kunne passe best til forskningsspørsmålet mitt (Utdanningsdirektoratet, 2020). Jeg mener at dette kompetansemålet ikke vil dekke temaet figurmønster i stor nok grad, og ikke kunne brukes til å svare på mitt forskningsspørsmål.

På 8.trinn er kompetansemålene «beskrive og generalisere mønstre med egne ord og algebraisk» og «lage og forklare regneuttrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Disse kompetansemålene dekker i stor grad figurmønster, og vil gi svar på forskningsspørsmålet i studien min. Basert på nevnte kompetansemål vil elever i 8.klasse ha kjennskap til algebra og figurmønster, men kunnskapen vil ikke være for høy. Til tross for at kompetansemålet «lage og forklare regneuttrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner» ikke direkte beskriver figurmønster, kan det knyttes opp til algebraen og dens funksjon til figur- og tallmønster.

På 9.trinn består kompetansemålene for det meste av geometri, statistikk og sannsynlig, men et av kompetansemålene egner seg til forskningsspørsmålet mitt.
Kompetansemålet «beskrive, forklare og presentere strukturer og utviklinger i geometriske mønstre og i tallmønstre» innebærer spesifikt geometriske mønstre og tallmønstre, som studien min handler om (Utdanningsdirektoratet, 2020). Til tross for at kompetansemålet fra 9.trinn innebærer geometriske mønstre, mener jeg kompetansemålene fra 8.trinn dekker i stor nok grad til å passe for studien min. Dessuten er generalisering av figurmønster anbefalt som en introduksjon til algebra, som gjorde at valget falt på 8.trinn. Jeg ønsker å følge forskernes (Lannin, 2005; Radford, 2010) sine råd om å introdusere elevene for algebraen gjennom mønsteraktivitet, men dette vil ikke være fokuset ved gjennomføringen av studien.

I valg av klasse var jeg opptatt av å finne en klasse som lot meg gjennomføre studien hos dem, men samtidig hadde algebra som tema høsten 2022. Da jeg fant skole hadde jeg dialog med matematikklæreren om hvilke elever hen mente kunne passe til prosjektet, men også med hensyn til mine to kriterier. Hensikten med studien min er å finne ut hvilke generaliseringsstrategier elevene bruker i møte med figurmønsteroppgaver. Av den grunn var det viktig for meg at de utvalgte elevene var motivert til å gjennomføre kartleggingsoppgavene og å samarbeide med andre elever. Det andre kriteriet var at de utvalgte elevene skulle ligge mellom 3 og 6 i karakter. Grunnen til dette var fordi elevene skulle ha god nok matematisk kompetanse til å kunne besvare kartleggingsoppgavene og bruke noen generaliseringsstrategier.

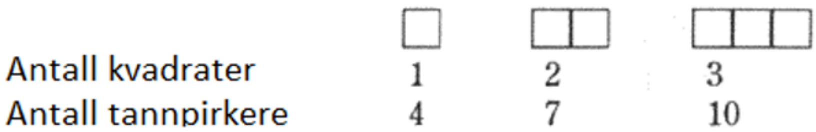
3.4. Valg av kartleggingsoppgaver

For at elevene skulle kunne bruke generaliseringsstrategier måtte kartleggingsoppgavene lede til et rikt utvalg av generaliseringsstrategier. I dette avsnittet vil jeg presentere utvalget av kartleggingsoppgaver som ble brukt i gruppeobservasjonen. Avsnittet vil avslutte med å forklare hvorfor kartleggingsoppgavene vil være hensiktsmessig til studien min i lys av kriteriene jeg har presentert tidligere i avsnittet.

Studien min tok utgangspunkt i fire kartleggingsoppgaver. Kartleggingsoppgavene var valgt ut i fra tre kriterier. Første kriteriet gikk ut på at oppgaven skulle vært gjennomført ved tidligere forskning, slik at jeg kunne sammenligne mine funn med andres funn. Felles for alle kartleggingsoppgavene var at jeg valgte å ha lik oppgaveformulering som forskerne hadde brukt. Dette valgte jeg fordi disse oppgavene er kvalitetssikret i større grad enn oppgavene jeg eventuelt hadde lagd selv.
Det andre kriteriet var at oppgaven skulle være åpen for flere generaliseringsstrategier enn det tidligere forskning hadde funnet. Eksempel skulle oppgave 2 gi rom for flere generaliseringsstrategier enn recursive-, factual-, contextual- og symbolic generalization. Det siste kriteriet var at oppgaven skulle oppleves overkommelig, slik at elevene på 8.trinn ville mestre oppgavene og hadde en god opplevelse av studien.

3.4.1 Oppgave 1

Den første oppgaven er hentet fra Rivera og Becker (2005, s. 199).



a) Hvor mange tannpirkere trengs for å lage 4 kvadrater?
b) Hvor mange tannpirkere trengs for å lage 5 kvadrater?
c) Hvor mange tannpirkere trengs for n kvadrater?

Figur 3.1: Oppgave 1 (Becker & Rivera, 2005, s. 199)

Jeg valgte å starte med denne oppgaven siden jeg anså dette figurmønsteret som det mest overkommelige av kartleggingsoppgavene. I oppgaveformuleringen og figurmønsteret ønsket Rivera og Becker (2003, s. 66) å se om deltakerne i studien deres brukte generaliseringsstrategier ut i fra figurene (generalizing figurally) eller tallene (generalizing numerically). Dette ønsket jeg også å se på. Jeg ville også se om elevene brukte andre generaliseringsstrategier, og om elevene oppfattet oppgavene forskjellig. Jeg mener at oppgave 1 i tillegg gir rom for følgende generaliseringsstrategier: recursive generalization, counting, whole-object generalization, trail and error.

3.4.2 Oppgave 2

Den andre oppgaven er hentet fra Radford (2009; 2010).

Figur 1 **Figur 2** **Figur 3**

a) Tegn figur 4 og 5.
b) Finn antall sirkler i figur 10 og 100.
c) Skriv en melding til en elev i en annen klasse om hvordan man kan finne antall sirkler i en hvilken som helst figur.
d) Lag en formel for antall sirkler i figur n.

Figur 3.2.: Oppgave 2 (Radford, 2009, s. XXXVIII)

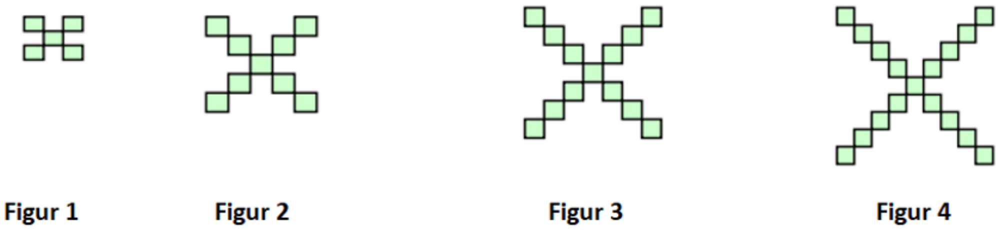
I oppgavene til Raford (2009; 2010) er figurene henvist til «figur 2.1, figur 2.2, figur 2.3, …». Her valgte jeg å gjøre om til «figur 1, figur 2, figur 3, …» for å unngå og skape unødvendig forvirring, og gjøre det lettere for eleven.

Radford (2009) beskriver valget av oppgaveformuleringen til deloppgavene, og hva målet med oppgavene er.
I oppgave 2a) ber Radford (2009) eleven om å tegne figur 4 og 5. Hensikten med spørsmålet er å se om eleven oppdager «recursive generalization». Radford (2009) mener at det vil være ideelt å bruke «recursive generalization» ved arbeid med lavere figurer, for eksempel på figurnumre fra 1-10. På en annen side mener Radford (2009, ss. XXXIX-XL) at «recursive generalization» vil være upraktisk å bruke for å finne høye figurnumre, for eksempel for figur 100 eller figur 1000.

I oppgave 2b) spør Radford (2009) etter antall sirkler i figur 10 og figur 100. Radford (2009) skriver at han ønsker at eleven skal bruke «recursive generalization» til figurnummer 10, men samtidig bruke ord, rytme og gester for å finne figurnummer 100 ved «factual generalization». I oppgave 2c ønsket Radford (2009) å få frem «contextual generalization» ved å be elevene om å skrive en melding til en medelev om hvordan man kan finne antall sirkler i hvilken som helst figur. Grunnen til at Radford (2009, s. XLI) ber elevene om å skrive en melding til en medelev er fordi skriving får mennesker til å gjengi eksplisitte ting for å huske bedre. Eleven kan ikke bruke peking og handlingsmønstre. Dette resulterer i at elevene blir tvunget opp på et høyere abstraksjonsnivå. Oppgave 2d) ber eleven om å finne en formel. Denne oppgaven ble brukt for å fremme «symbolic generalization» (Radford, 2009, ss. XLI-XLII).

3.4.3 Oppgave 3

Den tredje oppgaven er hentet fra Becker og Rivera (2006).



a) Finn kvadrat i figur 10 og figur 100.
b) Finn en formel som gjør det mulig å beregne antall kvadrater i figur n? Hvordan kom du frem til formelen?

Figur 3.3 - Oppgave 3 (Becker & Rivera, 2006, s. 467).

I denne oppgaven gjorde jeg en endring av bildeteksten til oppgaven som ble presentert i Becker og Rivera's (2006) artikkel. I artikkelen anvender de begrepet «bilde» i stedet for «figur», for eksempel «figur 1, figur 2, …» i stedet for «bilde 1, bilde 2, …». Dette gjorde jeg fordi jeg tror det vil være lettere for elevene, og samtidig unngår unødvendig forvirring. På grunn av jeg valgte å bytte begrepet «bilde» fra oppgaven, resulterte det i at jeg måtte omformulere oppgave 3b. Oppgave 3b har gått fra «å beregne antall kvadrater i bildet *n*» til «å beregne antall kvadrater i figur *n*».

Jeg valgte å bruke de tre første spørsmålene fra Rivera og Becker (2006) sitt pre-intervju i kartleggingsoppgavene, mens oppgavene fra post-intervjuet brukte jeg under intervjuene etter gruppeobservasjonen. Jeg valgte å benytte de samme spørsmålene i post-intervjuene som Becker og Rivera (2006) gjorde i intervjuene. Disse spørsmålene ble i midlertidig kun stilt i forbindelse med oppgave 3, og ikke de andre oppgavene (se vedlegg 4). På denne måten fikk jeg mulighet til å sammenligne resultatene til Rivera og Becker (2006).
Jeg valgte å ikke ta med oppgave d) fra Rivera og Becker (2006) av to grunner (oppgave d presenteres i figur 3.4).

To sjetteklassinger kom opp med to følgende formler.

Kevin sin formel er: $T = (n * 2) + (n * 2) + 1$, der n er antall figurnumre og T betyr totalt antall kvadrater. Er hans formel korrekt? Hvorfor eller hvorfor ikke?

Melanie sin formel er: $T = (n * 2) + (n * 2) + 1 - 1$, der n og T betyr det samme som hos Kevin. Er hennes formel korrekt? Hvorfor eller hvorfor ikke?

Figur 3.4 - Oppgave d i Rivera og Becker (2006).

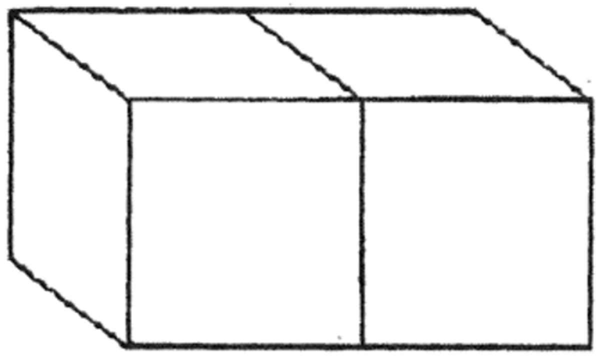
Den ene grunnen er fordi jeg mener oppgaven er for krevende og vanskelig for en 8.klassing. Den andre grunnen innebærer at jeg ikke mener oppgaven fremmer ulike løsningsstrategier eller passer til forskningsspørsmålet mitt. Jeg ønsket at elevene skulle bruke tid og energi på de andre oppgavene.

I Becker og Rivera (2005; 2006) sine artikler bruker de mye generaliseringsstrategiene, «generalizing figurally» og «generalizing numerically». Det ville vært spennende å se om elevene i studien min brukte andre generaliseringsstrategier enn de Becker og Rivera (2005; 2006) vektlegger, i tro at oppgavene åpner for flere generaliseringsstrategier enn «generalizing numerically og figurally».

3.4.4 Oppgave 4

Den fjerde oppgaven er hentet fra Lannin, Barker og Townsend (2006, s. 5), også kalt «the cube-sticker problem». «The cube-sticker problem» illustreres ved figur 3.5.

Et firma lager stenger ved å sette sammen kuber på rad og bruker en klistremerkemaskin til å sette «smilefjes»-klistremerker på stengene. Maskinen plasserer nøyaktig et klistremerke på hver synlig side av hver kube. Hver synlig side av hver kube må ha et klistremerke, så en lengde på 2 vil trenge 10 klistremerker.



a) Hvor mange klistremerker trenger du for stenger med en lengde til 1 til 10? Forklar hvordan du kom frem til dette.
b) Hvor mange klistremerker vil du trenge for en stang med lengde på 20? En lengde på 50? En lengde på 127? Forklar hvordan du kom frem til dette.
c) Forklar hvordan du kan finne antall klistremerker som trengs for en stang med hvilken som helst lengde. Skriv en regel som kan brukes for å bestemme dette.

Figur 3.5 - Oppgave 4 (Lannin, Barker & Townsend, 2006, s. 5).

Kube problemet er en oppgave som er blitt brukt mye i arbeid med figurmønster hos forskere. Jeg valgte å bruke Lannin et al. (2006) sin oppgaveformulering kontra andre forskningsartikler, var fordi jeg mente oppgaveformuleringene til Lannin et al. (2006) passet best til forskningsspørsmålet mitt. Dessuten slapp jeg å fjerne noen av delspørsmålene, slik jeg måtte ha gjort dersom jeg hadde brukt andres oppgaveformuleringer (for eksempel fra Lannin, 2005).

En annen grunn til at jeg valgte Lannin et al. (2006) sine oppgaveformuleringer er fordi jeg tror oppgaven gir rom for flere generaliseringsstrategier enn de fant. I Lannin, Townsend og Barker (2006) beskriver de fire generaliseringsstrategier: «explicit», «whole-object», «chuncking», «counting» og «recursive». Grunnen til at de valgte kube-problemet var for å gi muligheten til å anvende flere strategier (inkludert alle de fire) og den matematiske strukturen (Townsend, 2005, s. 61). Det vil være spennende å sammenligne spesielt dette. Townsend (2005, s. 61) mener at Kube-problemet har en økende lineær situasjon. Videre påpeker han at oppgaven gir elevene fleksibilitet, som vil si at det krever en viss grad av abstrakt tenkning fra elevene, og en matematisk forståelse. Lannin (2005) skriver i artikkelen sin «the value of situation that allowed for geometric schemes that connected the rule with a visual representation, such as the cube sticker problem, increased the likelihood of student success» (s. 252).

En fordel med oppgaven er at den åpner for dialog. I alle deloppgaver ble eleven bedt om å forklare hvordan de hadde tenkt, som har en sammenheng med det sosiokulturelle læringsperspektivet. Til tross for at oppgave 4 har stor vekt på at elevene skal forklare tankeprosessen, kan dette gå to veier. På den ene siden vil noen elever mestre dette og oppleve at det vil være lettere å vise kunnskapen gjennom forklaring av ord. Dette kan være en god indikator for at eleven har en dyp forståelse av emnet, ved å sette ord på det de har lært. På den andre siden kan være vanskelig for noen elever å forklare hvordan man har tenkt i de ulike oppgavene. Siden elevene har blitt utfordret på generalisering av figurmønstre i de tidligere oppgavene og dette er siste oppgave, tror jeg ikke dette vil være et problem.

3.5. Gjennomføringen av studien

Hensikten med studien er å belyse seks elevers løsningsstrategier på 8.trinn i møte med figurmønster. Gjennom kvalitativ forskning fokuseres det på få deltakere, slik at dataen blir detaljer og rik (Cohen et al, 2011). Forskning viser at anbefalt gruppestørrelsen er 3 deltakere (Liljedahl, 2021). Derfor har jeg valgt å bruke seks elever, som ble fordelt utover to grupper med tre elever på hver gruppe. Gjennomføringen ble gjort i løpet av to matematikktimer.

Før gjennomføringen hadde matematikklæreren i samråd med meg valgt ut seks elever som ville egne seg til studien. Dette ble gjort siden læreren kjente elevene best med utgangspunkt i mine kriterier til valg av elever. Videre diskuterte jeg og matematikklæreren om hvorvidt kartleggingsoppgavene var passende i forhold til elevenes matematiske kompetanse. Gjennomføringen av videoobservasjonen ble gjort på et av skolens grupperom. Læreren hadde ikke noe formening om hvilke elever som ville passe godt sammen i grupper, så gruppene ble tilfeldig delt inn av meg.

Før elevene startet på kartleggingsoppgavene snakket jeg med elevene om hva prosjektet handlet om, og hvorfor de var valgt ut. Under gjennomføringen var *det interaktiv observasjon*. Tjora (2021) forklarer interaktiv observasjon på følgende måte: «Interaktiv observasjon er observasjon hvor observatør og deltaker er åpne (synlige og tilgjengelige) for hverandre, slik at det vil være en grad av interaksjon mellom dem» (s.290). Dette gjorde jeg i tilfelle elevene skulle trenge hjelp til å forstå oppgavene eller oppgaveformuleringen.
Underveis i videoobservasjonene var fokuset av filmingen mot notatarket til elevene og

elevens kroppsspråk ved bruk av eventuelle gester. Elevene fikk en matematikktime til å gjennomføre kartleggingsoppgavene.

Da elevene var ferdig med kartleggingsoppgavene, ble individuelle intervjuer gjennomført med fokus på kartleggingsoppgavene. Etter avklaring med matematikklærer og lærer for neste time, ble vi enige om at noen av elevene skulle gjennomføre intervjuene i friminuttet og fagtimen etterpå. Intervjuene ble også videofilmet. Under intervjuene hadde elevene tilgang til notatarket og kartleggingsoppgavene de hadde brukt tidligere i studien. Dette var for at elevene skulle ha muligheten til å se hva de hadde svart eller gjort til de ulike oppgavene. Da alle elevene hadde blitt intervjuet samlet jeg notatarkene til elevene inn og begynte med analysen av dataene, som blir presentert i neste avsnitt.

3.6 Kvalitativ teoridrevet videoanalyse

Etter en datainnsamling sitter forskere med store og uoversiktlige mengder data som skal analyseres (Eriksen & Svanes, 2021, s. 287). Bruk av video ved klasseromsforskning innenfor observasjon og intervjuer har gradvis blitt mer populært (Dalland & Hølland, 2021). I dette avsnittet vil jeg presentere kvalitativ teoridrevet videoanalyse som analysemetode, og begrunne hvorfor den passer til studien min.

Kvalitativ teoridrevet videoanalyse går ut på å analysere videopptak systematisk og identifisere mønstre og sammenhenger mellom forskjellige elementer i opptaket (Dalland & Hølland, 2021). Analysen er teoridrevet, som vil si at utgangspunktet i en teoretisk forståelse av fenomenene undersøkes. Dessuten danner teorien og videoopptakene grunnlaget for analysen (Dalland & Hølland, 2021). Analyseprosessen har tatt utgangspunkt i tre dimensjoner, *transkribering, koding og kategorisering*.

Før jeg startet på transkriberingen så jeg gjennom alle videopptakene og skrev ned det viktigste fra hver video. Da jeg transkriberte videoene brukte jeg en *ordrett transkripsjon*. En ordrett transkripsjon prøver å være tett opp i talespråket, og inkluderer talefeil og halvuttalte ord (Dalland & Hølland, 2021). Jeg var opptatt av å få en helhetlig beskrivelse av videoene da jeg transkriberte, og inkluderte fyllord som for eksempel «hm» og «ehh». Underveis i transkripsjonen inkluderte jeg nonverbale gester og uttrykk, siden det kunne være aktuelt for noen generaliseringsstrategier. Jeg skrev ned tidspunktene elevene startet og sluttet med snakkingen eller bevegelsene, for at det skulle være lett å hente informasjon fra videoene. Da jeg var ferdig med transkriberingen, begynte jeg på *kodingen*.

Å kode er som regel startpunktet for de fleste kvalitative analysene (Bryman, 2016). Dalland et al. (2021) beskriver en kode på følgende måte: «En kode er som oftest et ord eller en kort setning som blir tildelt et fremtredende attributt fra tekstbaserte (observasjonsnotat/transkripsjoner), talebaserte (lydopptak) eller visuelle data (video)» (s. 268). Kodesystemet mitt tok utgangspunkt i tidligere forskning innen generaliseringsstrategier av figurmønstre, som gir en teoridrevet (deduktiv) tilnærming av analysen.
Et problem med koding er at det kan medføre til tap av sammenhengen i det som blir sagt (Bryman, 2016, s. 583). Jeg listet opp ulike generaliseringsstrategier og definisjoner av generaliseringsstrategier slik at jeg kunne koble elevens forklaringer opp mot andre forskeres generaliseringsstrategier. Dette ble gjort for å unngå at kodingen skulle miste sammenhengen i det som ble sagt. Forklaringene elevene brukte som ikke passet til beskrivelse av generaliseringsstrategiene, ble kodet med nytt navn utarbeidet av meg. Deretter ble kodene plassert i slutten av en setning med rød skrift, slik at de ble lettere å oppdage ved kategoriseringen av kodene. Etter å ha kodet det transkriberte innholdet ble det gjennomført en *kategorisering* av kodingen.

Kategorisering går ut å organisere dataen for å skape bedre oversikt over enheter. Det er da viktig at kategoriene som blir benyttet samsvarer med hensikten med studien (Eriksen et al., 2021). Før kategoriseringen ble kodene plassert i et Excel-skjema, og kodene som ble brukt flest ganger ble tatt utgangspunkt i kategoriseringen. Kategoriseringen var basert på en kombinasjon av induktiv og deduktiv tilnærming. Jeg initierte arbeidet med å utvikle kategorier for «generaliseringsstrategier» og «løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering» ved å gjennomgå relevant teori. Dette ga meg et fundament som jeg bygget videre på, og tilpasset i lys av eksempler fra datamaterialet. Eriksen et al. (2021) legger vekt på at endringer eller nyanseringer av kategoriene underveis i analyseprosessen er vanlig og viktig i valideringsarbeidet. I arbeid med kategorisering av datamaterialet ble kategoriene nyansert og endret 2-3 ganger. Dette resulterte i en analyse med syv kategorier, som kan leses om i kapittel 4 «Resultater og analyse».

3.7 Studiens kvalitet

I dette kapittelet vil jeg ta for meg forskningens kvalitet i form av studiens pålitelighet og gyldighet. Jeg velger å bruke begrepene pålitelighet og gyldighet i stedet for reliabilitet og validitet. Den ene grunnen er fordi begrepene reliabilitet og validitet kan tilknyttes den kvantitative forskningstradisjonen (Kvale & Brinkmann, 2015). Den andre grunnen er fordi

Postholm og Jacobsen (2018) bruker pålitelighet og gyldighet for å beskrive studiens kvalitet. Avsnittet vil først drøfte studiens pålitelighet og hvordan jeg har prøvd å legge til rette for det. Dette vil bli drøftet i lys av Postholm og Jacobsen (2018) sine fem punkter. Deretter vil jeg diskutere gyldigheten av studien min.

3.7.1 Pålitelighet

Pålitelighet handler om refleksjonen rundt prosjektet og forskerens eventuelle påvirkning av resultatet. Refleksjonen baseres på at forskeren selv reflekterer over sin påvirkning, og at forskeren gjør forskningsprosessen synlig slik at andre kan reflektere over den (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 224). I diskusjon av forskningens pålitelighet vil jeg ta utgangspunkt i Postholm & Jacobsen (2018, ss. 225-228) sine fem punkter; *relasjon mellom forsker og forskningsdeltaker, forhold mellom problemstilling og forskningsdeltaker, forskningens kontekst, hvem har vi ikke fått tak i* og *har vi registrert alt det viktige?*

Det første punktet handler om relasjonen mellom forsker og forskningsdeltaker. I forskning vil det være et forhold mellom forsker og forskningsdeltaker, og særlig ved metodene observasjon, intervju og spørreskjema (Postholm & Jacobsen, 2018). I min forskning har jeg brukt videoobservasjon og et semi-strukturert forskningsintervju. Ved observasjon og intervju kan deltakerne tilpasse atferden sin, for eksempel kan det ofte oppleves at deltakerne tilpasser det som blir sagt i intervjuet til det deltakerne tror intervjueren vil høre (Hox, 1994; West & Blom, 2017, sitert i Postholm & Jacobsen, 2018, s. 225). I et intervju er det viktig å ikke ha *ledende spørsmål* eller *uklare spørsmål*. Ledende spørsmål vil si at spørsmålet favoriserer en spesiell type svar, mens uklare spørsmål vil si at det brukes ord og begreper som deltakerne ikke forstår (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 225). I intervjuene mine var jeg opptatt at spørsmålene skulle være åpne og ikke ledende, slik at deltakerne kunne svare ærlig og upåvirket. Selv om spørsmålene som i første rekke ble stilt var åpne, kan noen av oppfølgingsspørsmålene oppleves som ledende ved gjennomgang av transkriberingen. Eksempel på et slikt oppfølgingsspørsmål var «så du la merke til at mønsteret økte med fire hver gang?», som kunne initiere «recursive generalization». Oppfølgingsspørsmålene ble stilt for å få en bedre forståelse av elevens tanker.
I observasjonen var oppgaven min å være så lite aktiv som mulig, men hjelpende dersom deltakerne ikke skulle forstå oppgaven. Ved den ene gjennomføringen kan jeg i ettertid oppleves litt for aktiv i forbindelse med oppgave 4, da jeg skulle forklare oppgavens kontekst.

Det andre punktet går ut på forholdet mellom forskningsspørsmål og forskningsdeltaker. I forskningsspørsmålet mitt ønsker jeg å finne hvilke løsningsstrategier elever på 8.trinn tar i bruk. Jeg mener derfor at forholdet mellom forskningsspørsmålet og forskningsdeltakere er naturlig og riktig. For å kunne svare på forskningsspørsmålet mitt er jeg avhengig av å bruke elever fra 8.trinn.

Det tredje punktet involverer forskningens kontekst. I forskning vil tid og sted være avgjørende (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 226). Da jeg skulle velge skole og klasse var et av kriteriene mine at klassen skulle enten starte eller holdt på med algebra. Gjennomføringen av studien ble gjort den andre uken klassen hadde om algebra, og samtidig med klassens matematikktimer. Dette ble gjort for at det skulle være samsvar mellom forskningens kontekst og forskningsspørsmål.

Fjerde punktet innebærer hvilke som ikke har deltatt. Forskning vil alltid representere et utsnitt av virkeligheten (Postholm & Jacobsen, 2018). På lik linje vil datainnsamlingen komme fra et begrenset utvalg av det som ville vært spennende å undersøke. En begrensning ligger i antall informanter til studien min. Optimalt sett burde jeg hatt flere informanter til å besvare og styrke påliteligheten til forskningsspørsmålet mitt, men på grunn av tidsbegrensning av masteravhandlingen valgte jeg seks elever.
I min studie ble seks elever valgt med hensyn til klassens matematikklærer og mine kriterier (se kapittel 3.5). På grunn av mangel på deltakelse fra jentene i klassen, ble kun gutter valgt ut til å delta i studien min. Dette resulterte i at jentene ble mitt frafall i studien. Til tross for dette frafallet vektlegges ikke kjønnsdeltakelse i min studie.

Det siste og femte punktet går ut på om forskeren har registrert alt det viktige. Det er viktig å få innsikt i alt vi klarer registrere. «Den menneskelige hukommelsen er ikke skapt for å lagre store mengder detaljert informasjon med usikker nytteverdi» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 227). Det kreves trening å notere for hånd. I min studie har jeg valgt videoopptak av både gruppeobservasjonene og intervjuene for å kunne hente informasjon til senere. Ved å ta videoopptak gir det meg fordelen å kunne få detaljert data etter gjennomføringen og gi riktige konklusjoner ut fra funnene.

Eriksen et al. (2021) påpeker at «definisjoner og eksempler kan bidra til å gjøre analysen transparent og vise at kodingen er gjennomført på en systematisk og vitenskapelig måte» (s. 292). Dette mener de kan styrke studiens pålitelighet. I min studie har jeg ikke benyttet et ferdigstilt kode-program, men kodet og kategorisert i lys av forskeres definisjoner av generaliseringsstrategier. Med utgangspunkt i Eriksen et al. (2021) vil det styrke påliteligheten i studien min.

3.7.2. Gyldighet

Kvale & Brinkmann (2015) definerer *gyldighet* på følgende måte: «styrken og gyldigheten til et utsagn; i samfunnsvitenskapene viser validitet som regel til om en metode faktisk kan brukes til å undersøke det den sier den skal undersøke» (s. 357). Gyldighet kan deles inn i *indre- og ytre gyldighet*.

Indre gyldighet dreier seg om hvor stor grad det er «samsvar mellom den virkeligheten vi påstår at vi studerer og analyserer, og de begreper og teorier vi benytter for å beskrive denne virkeligheten» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 229).

En viktig faktor som kan påvirke resultatene i min studie er elevens påvirkning av å bli filmet eller intervjuet. Det vil være unaturlig for elevene å bli videofilmet både da de arbeidet med kartleggingsoppgavene og ble intervjuet. Dette kan ha påvirket elevens svar. Min oppfatning var at elevene syntes det var unaturlig i starten av oppgavejobbingen, men «glemte» kameraet utover i prosessen. Den største påvirkningsfaktoren jeg opplevde i studien min var elevenes påvirkning innad i gruppen. Under gruppeobservasjonene var elevene opptatt av å dobbeltsjekke hverandres svar, og dersom elevene hadde ulike svar skapte det usikkerhet hos elevene, og elevene byttet ofte svar til det majoriteten svarte. Likevel mener jeg at jeg fikk «avslørt» elevene hvis de tok medeleven sitt svar da jeg spurte om hvordan eleven hadde fått dette svaret, og hvordan eleven hadde tenkt.

Eriksen og Svanes (2021) mener at å utarbeide et kodeskjema vil bidra til å sikre samsvar mellom teoretiske begreper og operasjonaliseringen av dem, som er viktig for begrepsgyldigheten. De teoretiske begrepene som studien bygger på er godt sammenkoblet med kategoriene som brukes i analysen av datamaterialet (Eriksen & Svanes, 2021, s. 291). Til tross for at jeg ikke brukte ferdigstilte kodeskjemaer eller analyseprogrammer, var kodene og kategoriene mine basert på teori som var innhentet både før og etter datainnsamlingen. Ergo mener jeg at begrepsgyldigheten ble godt ivaretatt.

Ytre gyldighet handler om graden av funnene fra en kontekst kan overføres, eller generaliseres, til andre kontekster som ikke er studert (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 238).

Studien min er kun gjennomført med seks elever i en 8.klasse. Overføringen av resultatene til andre kontekster vil være begrenset siden utvalget av elever er få og gjennomført kun på en skole. For å øke den ytre gyldigheten i min studie ville det vært nødvendig å øke antall elever, og gjennomført studien på flere skoler. Det kunne ha vært relevant og gjentatt studien ved en senere anledning for å se om resultatene ville vært konsistente over tid. På grunn av tidsomfanget til studien min var ikke dette være mulig å gjennomføre.

3.8 Forskningsetikk

I denne studien har jeg forholdt meg til generelle forskningsetiske retningslinjer fra Sikt (u.å), norske lover og forskrifter. Disse etiske retningslinjene vil bli presentert i dette avsnittet.

Ved gjennomføring av et prosjekt eller forskning, er det viktig å ha det etiske på plass. Da jeg startet å arbeide med prosjektet søkte jeg om godkjennelse for gjennomføringen av prosjektet til Sikt (tidligere NSD). For å få godkjennelse fra Sikt måtte jeg ha på plass et informasjonsskriv om prosjektet og et samtykkeskjema. Siden jeg skulle bruke elever i 13-14 års alderen trengte jeg elevens foresatte sitt samtykke. Samtykkeskjemaet ble delt ut av matematikklæreren på forhånd. I samtykkeskjemaet ble det beskrevet hva formålet med prosjektet var og hvorfor barnet deres ble spurt om å delta. Videre ble det informert om at prosjektet er frivillig og at det skulle være like lett å avgi samtykke, som å trekke samtykke tilbake.

Siden jeg har valgt å bruke videoobservasjon og videointervju var det viktig å presisere at videoopptakene vil bli behandlet konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det vil si at elevens navn ble byttet ut med fiktive navn, slik at det ikke var mulig å identifisere personene og opplysningene. Opptakene ble lagret på et OneDrive område som kun jeg hadde tilgang til, og ville bli slettet ved prosjektets slutt i henhold til Sikt’s retningslinjer. Informasjon- og samtykkeskjemaet kan lese i vedlegg 2.

Før jeg startet videoobservasjonene og videointervjuene, informerte jeg elevene om hvordan prosjektet ville gjennomføres og hvilke rettigheter de hadde.

4. Resultater og analyse

Dette kapittelet har til hensikt å presentere analysen av datamaterialet ved å kategorisere elevenes løsningsstrategier inn i syv kategorier. Kategoriene er bygd opp i stigende grad av generalitet, hvor den første kategorien har den laveste graden av generalitet, mens den siste har den høyeste graden (se figur 4.1). Formålet med analysen er å presentere hvordan elevene generaliserer figurmønstrene i kartleggingsoppgavene.
Etter å ha presentert datamaterialet i form av kategoriserte løsningsstrategier, vil analysen sammenligne resultatene med andre forskere sine kategoriseringer og funn.

Kategori 1: Ikke svart
Kategori 2: Strategier med ukorrekt svar som ikke innebærer generalisering
Kategori 3: Uspesifisert
Kategori 4: Strategier med korrekt svar som ikke innebærer generalisering
Kategori 5: Ufullstendige aritmetisk generalisering med ukorrekt svar
Kategori 6: Aritmetisk generalisering med korrekt svar
Kategori 7: Algebraisk generalisering
7.1 Algebraisk generalisering uten notasjon
7.2 Algebraisk generalisering med notasjon

Figur 4.1: Kategorisering av løsningsstrategiene

Kategoriseringen har syv hovedkategorier, men kun kategori 7 *algebraisk generalisering* har underkategorier: *algebraisk generalisering uten notasjon* og *algebraisk generalisering med notasjon*. I avsnittene 4.1 til 4.7 vil jeg presentere både hovedkategoriene og underkategoriene til *algebraisk generalisering*. Jeg vil også trekke likheter til episoder fra datamaterialet samlet inn under gruppeobservasjonene og de individuelle intervjuene. Hvert delkapittel vil inneholde en beskrivelse og redegjørelse av definisjonen rundt hovedkategoriene og underkategoriene. Deretter vil jeg sammenligne med andre forskere sine funn og kategorier. Først vil det bli presentert en tabell med oversikt over kategoriseringen i lys av antall ganger kategorien ble benyttet i studien min (se figur 4.2). Videre vil det bli presentert en tabell over antall «løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering» og «generaliseringsstrategier» elevene i studien min brukte (se figur 4.3).

I analysen vil figur 4.2 presentere de syv kategoriene av løsningsstrategier og antall forekomster av disse i datamaterialet. Målet med denne kategoriseringen er å forstå den økende graden av generalitet elevene har til figurmønstrene i kartleggingsoppgavene.

Kategorisering		Elev 1	Elev 2	Elev 3	Elev 4	Elev 5	Elev 6	Sum
Kategori 1 - Ikke svart			1		1	1	6	9
Kategori 2 - Strategier med ukorrekt svar som ikke innebærer generalisering		1	2	2		2	1	8
Kategori 3 - Strategier som er uspesifisert				4			2	6
Kategori 4 - Strategier med korrekt svar som ikke innebærer generalisering						2	3	5
Kategori 5 - Ufullstendig aritmetisk generalisering med ukorrekte svar		1	16	6		1	4	28
Kategori 6 - Aritmetisk generalisering med korrekt svar		8	6	3	8	8	2	35
Kategori 7 - Algebraisk generalisering								
	7.1 Algebraisk generalisering uten notasjon	4	1	7		6	5	23
	7.2 Algebraisk generalisering med notasjon	12			14			26

Figur 4.2: Oversikt over valgte strategier for hver elev

Kategorisering		Elev 1	Elev 2	Elev 3	Elev 4	Elev 5	Elev 6	Sum
Kategori 1 - Ikke svart			1		1	1	6	9
Kategori 2 - Strategier med ukorrekt svar som ikke innebærer generalisering								
	Vilkårlig regning med tallene som blir gitt i oppgaven		1	2			1	4
	Trail and error med feil svar	1	1			2		4
Kategori 3 - Uspesifisert				4			2	6
Kategori 4 - Strategier med korrekt svar som ikke innebærer generalisering								
	Counting					2	3	5
Kategori 5 - Ufullstendig aritmetisk generalisering med ukorrekt svar								
	Recursive generalization ved feilaktige tallverdi		5	1				6
	Whole-object generalization		8	3		1	4	16
	Difference metode	1	3	2				6
Kategori 6 - Aritmetisk generalisering med korrekt svar								
	Recursive generalization	8	5	3	8	3	2	29
	Oppdeling av figuren i mindre enheter		1			5		6
Kategori 7.1 - Algebraisk generalisering uten notasjon		4	1	7		6	5	23
Kategori 7.2 - Algebraisk generalisering med notasjon		12			14			26

Figur 4.3: Oversikt over antall ganger elevene brukte de ulike strategiene.

Tabellen (figur 4.3) er hierarkisk med den laveste graden av generalitet som er «kategori 1 ikke svart» og høyest grad av generalitet som er kategori 7.2 «algebraisk generalisering med notasjon». Tabellen har tatt utgangspunkt i kodene fra intervjuene og gruppeobservasjonene. På grunn av at noen av elevene har benyttet flere strategier enn de som tidligere ble nevnt, ble antallet løsningsstrategier redusert, og kun de løsningsstrategiene som ble benyttet hyppigst ble inkludert i tabellen. Løsningsstrategiene som forekom en eller to ganger totalt ble ikke med i tabellen. Jeg vil kommentere tabellen nærmere i kapittel 5.1 «Fremstilling av generaliseringsprosessen».

4.1 Kategori 1 – Ikke svart

I dette avsnittet vil jeg presentere den første kategorien «ikke svart». Deretter vil relevante eksempler fra datamateriale bli presentert, og avsnittet vil avsluttes med en analyse av kategorien «ikke svart».

Kategori 1: Ikke svart

For noen av elevene kunne både oppgavene og deloppgavene virke avanserte og vanskelige. Kategorien «ikke svart» innebærer at elevene ikke svarte på oppgaven. Denne måten å forholde seg til oppgaven på ble ofte observert da elevene ble bedt om å lage en formel. «Ikke svart» kan ikke betraktes som en «generaliseringsstrategi» eller «løsningsstrategi som ikke innebærer generalisering», da eleven verker gir et svar på oppgaven eller forsøker å komme frem til en løsning.

Basert på datamaterialet kan fire av seks elever i min studie kategoriseres i kategorien «ikke svart», der tre av elevene har valgt å unnlate å svare på et eller flere spørsmål om å lage en formel. Eksempler presenteres ved elev 6 og elev 5 til oppgave 1c:

Eksempel av elev 6:

942 Intervjuer: Hvordan opplevde du oppgave 1c?
943 Elev 6: 1c skjønte jeg ikke. Jeg skjønte ikke hva n var, så jeg hoppet over den.

Elev 6 valgte å ikke svare på oppgave 1c siden han ikke forstod oppgaven.

Eksempel av elev 5:

876 Intervjuer: Fikk du gjort oppgave c eller?

877 Elev 5: Jeg skjønte ikke den helt jeg.

I oppgave 1c velger elev 5 å ikke svare på oppgave 1c siden han ikke skjønte oppgaven.

Analyse av kategorien «ikke svart»

Fire av elevene i studien min valgte å unnlate å svare på noen av deloppgavene, og av den grunn syntes jeg det er vanskelig å si noe om analysen omkring kategorien «ikke svart». Resultater fra datamaterialet indikerte at spørsmålene elevene ikke valgte å svare på var spørsmål som spurte etter en formel for en vilkårlig n. En av grunnene til at elevene ikke svarte på slike spørsmål mener jeg er fordi eleven ikke vet hvordan en formel skal utformes eller ikke vet hvordan de kan trekke inn bokstaver i en formel. I oppgave 1c, som spurte etter hvor mange tannpirkere som trengtes for n kvadrater, spurte begge gruppene i gruppeobservasjonen hva som mentes med spørsmålet og hva de skulle gjøre. MacGregor og Stacey (1997, s. 1) fant ut at elever i 13-15 års alderen ikke var i stand til å håndtere oppgaver som krevde tolkning av bokstaver som generaliserte tall eller ukjente på grunn av manglende forståelse av algebraisk notasjon. Dette mener jeg kan ha en sammenheng med resultatet jeg fant i denne kategorien.

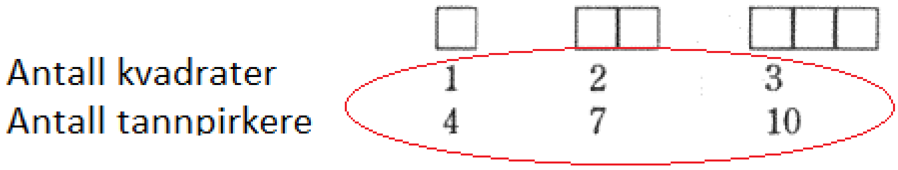
4.2 Kategori 2 – Strategier med ukorrekt svar som ikke innebærer generalisering

Dette avsnittet vil ta for seg kategori 2 *Strategier med ukorrekt svar som ikke innebærer generalisering* innebærer, og hvorfor løsningsstrategier i denne kategorien ikke er generaliseringsstrategier. Videre vil jeg beskrive eksempler fra datamateriale som passer inn i denne kategorien, før jeg avslutter med å presentere en analyse av eksemplene som er beskrevet i lys av relevant teori.

Elever som bruker «Strategier med ukorrekt svar som ikke innebærer generalisering» tar i bruk en «løsningsstrategi som ikke innebærer generalisering», og ikke «generaliseringsstrategi». Basert på definisjonen av generaliseringsstrategi i kapittel 2.2.2 vil ikke metodene «vilkårlig regning med tallene som blir gitt i oppgaven» og «trail and error med feil svar» være generaliseringsstrategier. Jeg har derfor valgt å kalle strategiene for «løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering», på grunn av strategiene er en form for løsninger som ikke involverer generalisering. Svarene i oppgavene til disse strategiene vil være ukorrekte.

Vilkårlig regning med tallene som blir gitt i oppgaven

Denne metoden oppstod kun ved arbeid til oppgave 1. *Vilkårlig regning med utgangspunkt i oppgaven* går ut på at eleven tar utgangspunkt i tallene som blir oppgitt i oppgave 1 (se figur 4.4), og bruker dem ukorrekt.



Figur 4.4 - Tallene elevene tok utgangspunkt i metoden "vilkårlig regning med tallene som blir gitt i oppgaven"

Dette skjedde kun da elevene skulle lage en formel til kartleggingsoppgave 1. Jeg skal illustrere metoden ved episoder fra intervjuene med elev 2 og elev 3 i samtale om oppgave 1c.

Eksempel 1:

Dette eksempelet illustreres av elev 3 i samtale om oppgave 1c.

523 Intervjuer: Hvordan tenkte du på oppgave c da?

524 Elev 3: Ehm, der gikk jeg egentlig litt sånn. Bare for å få sett da, så tok jeg 6 så tok jeg minus 1,4 eller noe sånn så fikk jeg minus 1.

525 Intervjuer: Ja.

526 Elev 3: Som sluttsvar.

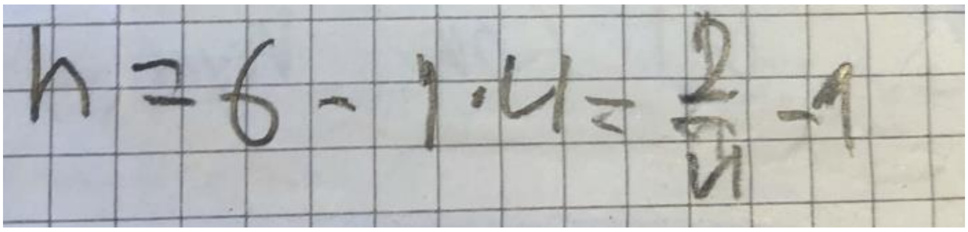
527 Intervjuer: Mhm. Hvordan fikk du de tallene?

528 Elev 3: Ehh (eleven ler). Nå tok jeg den her. Når jeg fikk det her svaret på c eller?

529 Intervjuer: Ja.

530 Elev 3: Jeg tok minus. Jeg tok først minus så tok jeg 1 ganger 4, og da fikk jeg da 2,4 på den så tok jeg minus 1.

Her tar elev 3 i bruk tallene under figurene på kartleggingsoppgave 1, og prøver å lage en formel slik som oppgave 1c spør etter. Formelen eleven skrev er vist i figur 4.5:



Figur 4.5 - elev 3 sin formel til oppgave 1a.

Eksempelet til elev 3 vil gi feil utregning siden elev 3 har tolket informasjonen på en ukorrekt måte. Dette resulterte i at oppgave 1 fikk en ugyldig formel.

Eksempel 2:

Dette eksemplet illustreres med elev 2 i samtale om oppgave 1c.

420 Intervjuer: Ehh, oppgave c? hvordan tenkte du på den?

421 Elev 2: Oppgave c? Tenkte … den sleit jeg litt med.

422 Intervjuer: Var det litt vanskelig å finne n?

423 Elev 2: Ja, jeg tror jeg tok n pluss 2/7 minus 1, tror jeg det var.

424 Intervjuer: Okei. Hvor fikk du 2/7?

425 Elev 2: Ehh, her (elev 2 peker på informasjonen med antall kvadrater og antall tannpirkere, der to kvadrater har 7 tannpirkere).

426 Intervjuer: Okei, så du tok på måte den delen der (lærer peker på informasjonen i oppgave 1)?

427 Elev 2: Ja.

I dette eksemplet kommer det tydeligere frem at elev 2 brukte delen med tallinnformasjon (se figur 4.4) i oppgave 1 i utformingen av en formel.
Likt som eksempelet til elev 3, vil eksempelet til elev 2 gi feil utregning siden eleven har tolket informasjonen på en ukorrekt måte. Av den grunn resulterte det i en ugyldig formel til oppgave 1.

Trail and error med feil formel

Metoden *trail and error med feil formel* er en av metodene som ble brukt når elevene skulle finne en formel for figurmønstrene. «Trail and error med feil formel» har mange likhetstrekk med løsningsstrategien «trail and error», som innebærer å komme med en formel eller regel uten å vite hvorfor den fungerer (Lannin, 2005, s. 234). Forskjellen er at eleven som benytter «trail and error med feil formel» vil oppnå korrekte verdier for ulike figurnumre, siden formelen ikke er korrekt. Skulle en benytte seg av den formelen som er lagd, vil hen ikke kunne se sammenhengen mellom mønsteret og formelen fordi hen bare har gjettet på en formel. Dersom man velger å anvende den utarbeide formelen, vil man ikke kunne oppfatte sammenhengen mellom mønsteret og formelen, da man kun har gjettet seg frem til en formel uten en dypere forståelse. Et eksempel på denne metoden er elev 2 sin forklaring til oppgave 3b. Denne oppgaven spurte etter en formel for antall kvadrater i figur n.

480 Intervjuer: Da kan du se om du fant en formel.

481 Elev 2: Ja, det var n pluss n minus 1. Jeg vet ikke egentlig hvordan jeg kom fram til det.

I utsagn 481 illustreres det at elev 2 har formulert en formel, men ikke forstått hvorfor han har gjort som han har gjort. Til tross for utsagn 481 fra elev 2, har han skrevet formelen $n + 5 - 1$ ned på oppgavearket sitt.

I hver kartleggingsoppgave ble elevene bedt om å formulere en formel eller regel for mønstrene. Basert på datamaterialet var det mange elever som ikke forstod hvordan de skulle benytte bokstaver i sine formler, eller som ikke forstod hensikten med spørsmålet, selv etter forklaring. Dette resulterte til at elevene gjettet på formler eller unnlot å besvare spørsmålene.

Analyse av strategier som ikke innebærer generalisering med ukorrekte svar

I arbeid med å analysere strategiene til elevene tok jeg utgangspunkt i Radfords (2006; 2010) beskrivelse av hva en generaliseringsstrategi er, og beskrivelse av «aritmetiske- og algebraiske generaliseringer». I Radford (2006) presenterer han en tabell med en tredje kategori, «naive induction». I artikkelen hevder Radford (2006) at «trail and error» ikke er en generalisering, men en «naive induction». I henhold til Radford (2006) beskrivelse av «naive induction» er det en tilnæming hvor man gjetter seg frem til en formel som gir korrekte svar. Formelen som elevene utarbeider gjennom «naive induction» blir deretter testet for å verifisere om tallene i ulike figurnumre gir korrekte svar. Siden løsningsstrategien «trail and error med feil svar» innebærer det samme som «trail and error», velger jeg å plassere «trail and error med feil svar» i kategori 2 «Strategier som ikke innebærer generalisering med ukorrekte svar».

Løsningsstrategien «vilkårlig regning med tallene som blir gitt i oppgaven» blir kun brukt i oppgave 1, der elevene i min studie brukte opplysningstallene fra kartleggingsoppgave 1 da de lagde en formel (se figur 4.5). Basert på Radford's (2010) beskrivelser av aritmetisk- og algebraisk generalisering, vil ikke vilkårlig regning med tallene som blir gitt i oppgaven oppfylle kravene til en generaliseringsstrategi. Elevene som bruker denne strategien har ikke oppfattet noen likheter i mønsterets oppbygning, og velger å gjette seg til en formel basert på tallopplysningen. Av den grunn mener jeg at «vilkårlig regning med tallene som blir i gitt i oppgaven» kan minne om Radford (2006) sin beskrivelse av «naiv induction». Løsningsstrategiene i kategori 2 «Strategier med ukorrekt svar som ikke innebærer generalisering» gir et feil svar og elevene sjekker ikke om formelen stemmer i etterkant

4.3 Kategori 3 – Strategier som er uspesifisert

I dette avsnittet vil jeg beskrive kategori 3 *Strategier som er uspesifisert*. Deretter vil jeg komme med eksempler på elevers svar som tilhører denne kategorien. Avslutningsvis vil jeg gi en kort analyse av disse eksemplene.

Kategori 3 *Strategier som er uspesifiser*t innebærer at elevene har kommet med en løsningsstrategi til kartleggingsoppgavene. Denne løsningsstrategien kunne ikke kategoriseres ut i fra generaliseringsstrategiene i kapittel 2.4.1. Elevene benyttet en strategi som mangler tydelige og definerte trinn eller prosedyrer, som gjorde det vanskelig å konstruere en nøyaktig beskrivelse eller navn til strategien. Elevens forklaring er upresis, og derfor blir det vanskelig å kategorisere og forstå elevens tankeprosess. Siden språket og tankeprosessen i denne kategorien er upresist, velger jeg å ikke kategorisere det som en generaliseringsstrategi, men heller ikke som en «løsningsstrategi som ikke innebærer generalisering». Elevene i denne kategorien har brukt en strategi. Kategorien «strategier som er uspesifisert» er ikke hentet fra faglitteraturen, som kompliserte analysen av de eksemplene som ble inkludert i denne kategorien, samt muligheten til å referere til relevant teori. Dette er på grunn av at forklaringene elevene brukte i denne kategorien var upresise.

Eksempler på løsningsstrategien «uspesifisert» illustreres først ved elev 3 i forklaring på oppgave 1a og deretter på oppgave 2b.

Eksempel 1:

Det første eksemplet på denne strategien er ved elev 3 sin forklaring av oppgave 1a.

514 Intervjuer: For å lage (peker på oppgave 1). For hvor mange som trengtes?

515 Elev 3: Ja, jeg så litt på den her (peker på figur 3 i oppgave 1) og litt forskjellig.

516 Intervjuer: Så du på figuren eller på tallene? Eller hva var det du så på?

517 Elev 3: Jeg så egentlig litt på mønsteret og sånn. Fordi her ser du jo 1,2,3 (peker på figur 1, figur 2 og figur 3 i oppgave 1). Det går oppover liksom.

Her ser man at elev 3 prøver å forklare hvordan han har tenkt for å finne antall tannpirkere til fire kvadrater. Basert på utsagn nr. 517 kan man se at elev 3 forteller at han har tatt utgangspunkt i mønsteret og sett at noe går oppover. Elev 3 forteller ikke hvordan han tenkte eller arbeidet med oppgave 1a i gruppeobservasjonen. Til tross for ingen beskrivelse i gruppeobservasjon og en upresis forklaring i intervjuer har elev 3 svar 13 tannpirkere på notatarket sitt (som er det riktige svaret).

I eksempel 1 observerer jeg at elev 3 prøver å forklare hvordan han har tenkt for å finne antall tannpirkere til fire kvadrater. Elev 3 har oppdaget en økende tendens i mønsteret i oppgave 1. På grunn av mangelen på konkret informasjon fra elev 3 om hva som øker (enten tannpirkere eller kvadrater), oppstod det en utfordring for meg i å forstå hva som økte.

Eksempel 2:

Det andre eksemplet på denne strategien benyttet elev 3 i forklaring av oppgave 2b.

545 Intervjuer: Ja, og oppgave b?

546 Elev 3: Ehh, der fikk jeg 23 på den første, for da tok jeg. Først så fant du ut hvor mye det var oppe på 23. Nei, på 10. Hvis du lissom, figur 10, som da ble, som da ble 11 på toppen og 12 under, og det blir 23 til sammen. Så da plusset jeg de to sammen.

I eksempel 2 ga elev 3 informasjon om at i figur 10 vil den øverste raden ha 11 sirkler og den nederste raden vil ha 12 sirkler. Elev 3 fortalte deretter at totalt antall sirkler i figuren ble 23. Elev 3 sin forklaring var ikke tilstrekkelig presis til å beskrive oppbygningen av mønsteret på en entydig måte. Derfor ble elev 3 sin forklaring kategorisert som uspesifisert.

I eksempel 2 opplevde jeg elev 3 litt mer konkret enn i eksempel 1. Elev 3 fortalte at figur 10 ville ha 11 på toppen og 12 under, og at det tilsammen ville bli 23, som er korrekt. I dette eksemplet forstod jeg at elev 3 brukte figur 10 til å illustrere hans forståelse av mønsterets oppbygning, men selv om elev 3 beskrev figur 10 er ikke beskrivelsen presis nok. Hvis løsningsstrategien til elev 3 skulle bli kategorisert med en høyere grad av generalitetet måtte elev 3 forklart det på en måte, at essensen var at den øverste raden ville ha en mer sirkel enn figurnummeret, mens den nederste raden ville ha to flere sirkler enn figurnummeret».

4.4 Kategori 4 – Strategier med korrekt svar som ikke innebærer generalisering

I kapittel 4.4 vil jeg presentere den fjerde kategorien av kategoriseringen i generaliseringsprosessen. Deretter vil jeg komme med et eksempel fra datamaterialet som passer til kategorien. Jeg vil avslutte med presentere en analyse av kategorien knyttet til eksempelet og relevant teori.

Kategori 4 *Strategier som ikke innebærer generalisering med korrekte svar* innebærer i likhet med kategori 2 metoder som er «løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering», og ikke «generaliseringsstrategier». Kategori 2 og 4 går ut på det samme, men forskjellen er at elevene som brukte metodene i kategori 4 kom frem til et korrekt svar. Basert på mitt datamateriale var det kun løsningsstrategien «counting» som passet under denne kategorien.

Counting

En av strategiene til kategori 4 «Strategier som ikke innebærer generalisering med korrekte svar» er løsningsstrategien fra Stacey (1989) «counting». I oppgave 1a og 1b ble elevene spurt hvor mange tannpirkere det trengtes for å lage fire og fem kvadrater. For å ta i bruk «counting» vil man tegne mønsteret ned først, for å deretter telle antall elementer i hver figur eller mønsteret. I oppgave 1a og 1b valgte elev 5 å ta i bruk «counting», som kom tydelig frem under intervjuet med elev 5.

862 Intervjuer: Okei. Så hvis vi starter med oppgave 1, hvordan opplevde du den?

863 Elev 5: Det var litt vanskelig før jeg skjønte det. Da jeg skjønte det var det enkelt.

864 Intervjuer: hm. Hva var det du syntes var vanskelig? Var det de tallene under her (intervjuer peker på tallene under oppgave 1)?

865 Elev 5: Bare å skjønne det.

866 Intervjuer: Bare å skjønne mønsteret, ja. Mhm, men ehh, på oppgave 1a hva tenkte du der da?

867 Elev 5: Hmm, jeg bare tegnet opp (elev 5 peker på tegningen sin)

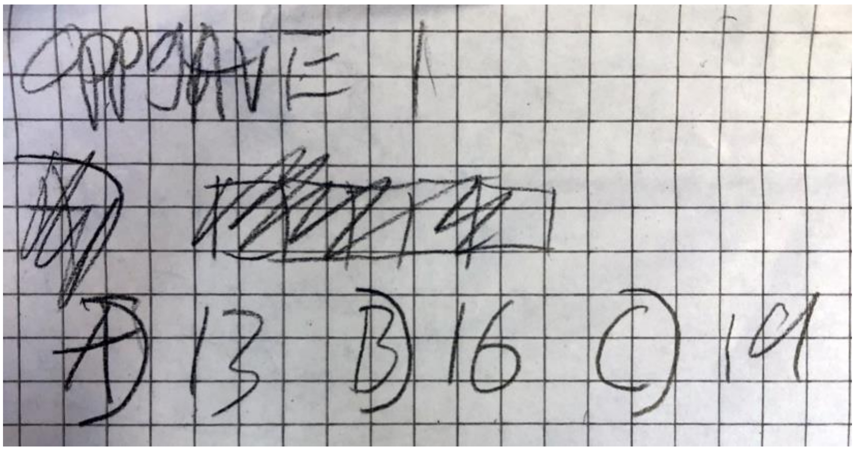
868 Intervjuer: Ja, så du tegna?

869 Elev 5: … Bokser og hvor mange. Så telte jeg (elev 5 peker på tegningen sin til oppgave 1) hvor mange tannpirkere det skulle være.

870 Mhm, ikke sant. Og på oppgave b?

871 Elev 5: Der gjorde jeg det samme, bare tok en til boks.

I denne oppgaven har elev 5 hatt problemer med å forstå oppgave 1, og derfor valgt å tegne ned mønsteret for å kunne oppdage sammenhengen fortere og lettere. Ut ifra figur 4.6 kunne man se at elev 5 valgte å tegne ned mønsteret, men å kladde over tegningen sin før oppgavearket ble levert inn.



Figur 4.6 - Elev 5 sin tegning av mønsteret i oppgave 1.

Analyse av strategier med korrekt svar som ikke innebærer generalisering

I oppgave 4 som ble hentet fra Lannin et al. (2006) ønsket de å fremkalle ulike generaliseringsstrategier, inkludert «counting» (Townsend, 2005, s. 61). Jeg synes derfor det er interessant at ingen av elevene i min studie tok i bruk løsningsstrategien «counting» i arbeid med oppgave 4. Strategien counting ble kun benyttet av elev 5 i oppgave 1 og av elev 6 i oppgave 2.

Etter at elev 5 har telt opp antall tannpirkere fra tegningen sin, fant han ut at hvert kvadrat økte med 3 for hver gang, noe som forklares videre i intervjuet. En spennende detalj i elev 5 sin forklaring under intervjuet er at han bruker «counting» som et «hjelpemiddel» for å se mønsterets oppbygning på en ny måte da han oppdager en ny generaliseringsstrategi. Stacey (1989) og Lannin et al. (2006) har i sine artikler valgt å kategorisere «counting» som en generaliseringsstrategi, men med utgangspunkt i definisjonene av generaliseringsstrategi samsvarer det ikke med beskrivelsen av «counting». Det kan virke som «counting» blir brukt for å oppdage en generaliseringsstrategi. Tankeprosessen til elev 5 kan harmoneres med hensikten Radford (2009) hadde med oppgave 2a. Radford (2009) ønsket at elevene skulle tegne de to neste figurene i figurmønsteret for å kunne oppdage en recursive generalization. Stacey (1989) hevder at det kan være nyttig å bruke flere forskjellige generaliseringsstrategier samtidig for å generalisere figurfølger for å oppnå et høyere nivå av generalitet, spesielt når figurene i følgen er mer komplekse og varierte.

4.5 Kategori 5 – Ufullstendig aritmetisk generalisering med galt svar

I dette avsnittet vil jeg presentere generaliseringsstrategier som går under kategorien *ufullstendig aritmetisk generalisering med galt svar*. Deretter vil jeg komme med eksempler på generaliseringsstrategier fra datamaterialet. Avsnittet avsluttes med en analyse av kategori 5 «Ufullstendig aritmetisk generalisering med galt svar».

Kategorien «Ufullstendig aritmetisk generalisering med galt svar» tar delvis utgangspunkt i Radford’s (2010) sin definisjon av aritmetisk generalisering. Elever som tar i bruk generaliseringsstrategier i kategori 5 evner å se en likhet i mønsteret, men implementerer informasjonen slik at svarene ikke blir korrekte. Eleven vil ikke ha kompetanse til å utarbeide en eksplisitt formel eller regel for mønsterets oppbygning eller egenskap. Typisk for kategori 5 er at eleven misoppfatter enten oppgaven eller mønsteret, eller ikke har tilstrekkelige matematiske ferdigheter til å anvende en generaliseringsstrategi som kan føre til et korrekt svar.

Recursiv generalization ved bruk av feilaktige tallverdier

Et av mange tilfeller som oppsto ved arbeid med kartleggingsoppgavene var at flere av elevene misoppfattet innholdet i kartleggingsoppgave 4. En av elevene som misoppfattet innholdet i kartleggingsoppgave 4 og brukte «recursive generalization ved bruk av feilaktige tallverdier» var elev 3.

> **589** Intervjuer: Ja. Supert, da kan vi gå over til oppgave 4 (intervjuer snur kartleggingsarket rundt). Og da lurer jeg på hvordan du opplevde den oppgaven?
>
> **590** Elev 3: Nei, da var det litt frem og tilbake. For først så tenkte jeg at det siden bare var to kuber, men egentlig så var det to kuber med seks sider hver. Så jeg tenkte ikke på det. Det var noe vi diskuterte litt. Så egentlig hadde jeg fått frem at to kuber var lik 10, men egentlig så er de to kubene til sammen 6. Nei, en er 6. For to ble da, det blir jo 10, men hvis jeg skulle hatt to så ville jeg tenkt at det ville jeg tenkt at det ville blitt 5 på en kube og 10 på to kuber. Hvis 3, for eksempel da, ville jeg tenkt det ble 14, men tenkte egentlig 15. For jeg tenkte å plusse på 5 hver gang.

Under gruppeobservasjonen mente elev 3 at økningen i antall klistremerker var fem per kube i stedet for fire. Elev 3 forklarte dette ved å argumentere at to kuber hadde 10 klistremerker, som skulle indikere at hver kube hadde fem klistremerker. Kartleggingsoppgave 4 ble mye og lenge diskutert under gruppeobservasjonen mellom elev 1 og elev 3, der elev 1 hevdet at økningen var fire og elev 3 hevdet at økningen var fem. I intervjuet uttrykte elev 3 at han hadde prøvd å forstå hvorfor det økte med fire og ikke fem, men at han tok utgangspunkt i en økning på fem for å finne antall klistremerker på 20, 50 og 127 kuber. Videre illustreres elev 3 sin forståelse av mønsteret til kartleggingsoppgave 4.

591 Intervjuer: Ja, så nå skal vi snakke litt om de ulike deloppgavene. Så da lurte jeg på hvordan du tenkte da du løste oppgave a? Du har snakket litt om det, men jeg vil bare spørre en gang til.

592 Elev 3: Nei, da fant jeg først ut hvor mye en sånn, ehh, ting var, en kube. Og det var 6. Og 10stk det var 42 fikk jeg til sammen. For jeg ganget og plussa først så mange, også ganget jeg på den igjen. Det ble 7 stk. Nei, 10 også ble det da når jeg ganger med den også er det alle sidene igjen.

593 intervjuer: Okei, så for å finne 10'ern så tok du ehh den her (Intervjuer peker på kube 1 og 2) og ganget med ...?

594 Elev 3: Nei, da plusset jeg egentlig litt.

595 Intervjuer: Du bare plusset alle oppover? Hva var det du plusset med da?

596 Elev 3: Ehh.. (Elev 3 ser på notatarket). Nei, jeg fikk. Egentlig så var det, jeg trodde det var 50. Så har jeg fikset det nå etterpå. For jeg tenkte da 2 det er 10, så tenkte jeg da litt flere bort og bortover, 5 som da …

597 Intervjuer: Så det øker da med 5 hver gang da?

598 Elev 3: Ja, egentlig.

Metoden som anvendes i dette tilfellet har likhetstrekk med generaliseringsstrategien «recurisve generalization». Forskjellen er at i «recursive generalization ved bruk av feilaktige tallverdier» vil eleven bruke feil tall som den faste økningen. Dette vil medføre til en feilaktig generalisering av figurmønsteret, og feilaktige svar på oppgaven.

Difference metode

I alle kartleggingsoppgavene ble det spurt om elevene kunne utarbeide en formel eller regel til oppgavens mønster. En av generaliseringsstrategiene som ble brukt for å finne en formel eller regel er det Stacey (1989) omtaler som «difference metode». Denne metoden innebærer at man multipliserer antall trinn med den faste differansen i mønsteret, og antar at dersom man implisitt adderer den faste differansen i mønsteret vil være $F(n) = fast\ differanse * n$ (Stacey, 1989). I kartleggingsoppgave 4 skulle elevene finne antall klistremerker for ulike lengder, og den siste deloppgaven spurte etter en forklaring til hvordan man kan finne antall klistremerker som trengtes for en stang med hvilken som helst lengde. Oppgaven spurte også etter en regel som kunne brukes for å bestemme dette. Et eksempel på «difference metode» illustreres i følgende utdrag fra elev 2 da han arbeidet med oppgave 4c:

501 Intervjuer: Hvordan gjorde du oppgave c?

502 Elev 2: C? da tok jeg. Hvis for eksempel, n er 2, så tar du 5 ganger 2.

503 Intervjuer: Hvorfor tok du ganger 2?

504 Elev 2: Fordi, 2 er egentlig bare et eksempel da.

505 Intervjuer: Ja, okei. Så du bare ganger det med 5, siden det øker med 5 hver gang?

506 Elev 2: Ja.

I dette oppgaveeksemplet er det to sentrale elementer ved elev 2 sin tekning. Det første bemerkelsesverdige er elev 2 sin oppfatning om at mønsteret økte med fem klistremerker i stedet for fire. Fra tidligere deloppgaver til kartleggingsoppgave 4 hadde elev 2 anvendt strategien «recursiv generalization ved bruk av feilaktige tallverdier». I intervjuet antydet elev 2 implisitt at multiplikasjon av antall trinn med fem ville gi det korrekte svaret, gitt at økningen er fem. Altså regelen til elev 2 ville være $F(n) = 5 * n$. Ved bruk av denne metoden, blir ikke konstantleddene tatt i betraktning. Det vil si de delene av figuren som er invariante og lik for alle figurene i følgen. Dette resulterer i en ikke riktig generalisering av figurfølgen og feilaktig svar. Siden økningen elev 2 fant mellom hver figur er feil, ville ikke formelen blitt korrekt dersom figurmønsteret ikke hadde hatt et konstantledd.

Whole-object generalization

Generaliseringsstrategien «whole-object generalization» var metoden som ble brukt nest flest ganger, til tross for at generaliseringsstrategien resulterte i et feil svar (se figur 4.3). Whole-object generalization innebærer at eleven bruker en del av figuren for å lage større figurer gjennom multiplikasjon. I kartleggingsoppgave 2b, der elevene skulle finne antall sirkler i figur 10 og 100, var det flere av elevene som brukte generaliseringsstrategien «whole-object generalization». Elev 2 forklarer tankeprosessen sin i oppgave 2b i intervjuet:

436 Intervjuer: Mhm, supert. Og på oppgave b?

437 Elev 2: Også på oppgave b tok jeg 5 ganger det som var, eller det som var fem (elev 2 peker på figur 5 i oppg. 2) ganger 2.

438 Intervjuer: Okei, for å finne 10'ern?

439 Elev 2: Ja.

440 Intervjuer: Og på 100?

441 Elev 2: På 100 så tok jeg 10, det som var 10 ganget med 10.

Her brukte elev 2 antall sirkler i figur 5 og multipliserte dette med to for å finne antall sirkler i figur 10. Elev 2 antok at $F(10) = 2 * F(5)$. Det samme skjedde ved $F(100)$, der elev 2 multipliserte antallet som eleven fant i figur 10 med 10. I utsagn 441 forklarte elev 2 at han tok antall sirkler i figurnummer 10, og multipliserte med 10 for å finne antall sirkler i figurnummer 100. Denne metoden gir korrekte resultater for en funksjon hvor figurnummeret og antall komponenter er proporsjonale størrelser. I kartleggingsoppgave 2 hentet fra Radford (2010) var ikke dette tilfellet. Her måtte eleven ha tatt hensyn til konstantleddet. Derfor vil ikke «whole-object generalization» være en metode som ga riktig svar i kartleggingsoppgave 2 eller de tre andre kartleggingsoppgavene i studien min.

Analyse av ufullstendig aritmetisk generalisering med ukorrekt svar

I eksemplene fra datamaterialet over har det blitt vist at elevene evner å oppdage en sammenheng i figurmønsteret, men av ulike grunner oppgir feil svar til enkelte av kartleggingsoppgavene. Kategori 5 «Ufullstendig aritmetisk generalisering med ukorrekt svar» kan kategoriseres som Radford's (2010) «aritmetisk generalisering». Radford (2010) beskriver aritmetisk generalisering som det laveste nivået av generalisering. Til tross for at generaliseringsstrategien fra Stacey's (1989) «difference metode» innebærer å lage et uttrykk, vil uttrykket gi ukorrekt svar på oppgavene i min studie. Stacey (1989) argumenterer for at det kan være utfordrende å bruke «difference metode» på figurfølger, spesielt når mønsteret har et konstantledd. Dette er fordi figurmønstre med et konstantledd vil føre til feil svar, dersom man bruker «difference metode». I slike tilfeller vil det være hensiktsmessig å ta i bruk andre generaliseringsstrategier som tar hensyn til mønsterets oppbygning. For elever som bruker generaliseringsstrategiene fra kategori 5 «ufullstendig aritmetisk generalisering med ukorrekt svar» vil dette bli utfordrende. Metodene i slike situasjoner er ufullstendige fordi de ikke har tatt med all informasjonen om figurfølgen som er nødvendig i betraktningen, for å gi en riktig generalisering. Stacey (1989) hevder at det kan være nyttig å bruke flere forskjellige strategier samtidig for å generalisere figurfølger med høyere nivå av generalitet, spesielt når figurene i følgen er mer komplekse og varierte.

Da jeg arbeidet med datamaterialet fant jeg ut at det ikke var mange av generaliseringsstrategiene hentet fra tidligere artikler som kunne brukes under denne kategorien. Siden det kun er to generaliseringsstrategier «whole-object generalization» og «difference metode» som går under denne kategorien, og blir brukt i tidligere artikler, ble det vanskelig å sammenligne min data med deres data.

En del av elevene brukte også «difference metode» i noen av oppgavene, som er hentet fra Stacey (1989). Ettersom at ingen av kartleggingsoppgavene er hentet fra Stacey (1989) sin artikkel ble det vanskelig å sammenligne resultater.

4.6 Kategori 6 – Aritmetisk generalisering med korrekt svar

I denne delen av analysen vil jeg presentere kategori 6 *Aritmetisk generalisering med korrekt svar* med utgangspunkt i eksempler fra datamaterialet. Deretter vil jeg avslutte avsnittet med en analyse i lys av tidligere forskning. Videre vil jeg sammenligne eksemplene og generaliseringsstrategier som ble beskrevet tidligere i avsnittet.

I denne kategorien av aritmetisk generalisering har elevene et høyere nivå av generalitet enn i kategori 5 «Ufullstendig aritmetisk generalisering med ukorrekt svar». Denne kategorien tar utgangspunkt i Radford's (2010) beskrivelse av «aritmetisk generalisering». Typisk for kategori 6 «Aritmetisk generalisering med korrekt svar» er at elever oppfatter mønsteret i figurens oppbygning, og oppfyller det første kravet for en aritmetisk generalisering. Til forskjell fra kategori 5, vil elevene som benytter seg av generaliseringsstrategier i kategori 6 komme frem til et korrekt svar.

Rekursive generalization

Oppgave 2a gikk ut på tegne figur 4 og 5. For at elevene skulle tegne de to neste figurene måtte de finne ut hvor mange sirkler hver figur økte med. «Recursive generalization» var den generaliseringsstrategien som ble benyttet flest ganger av elevene i løpet av utførelsen av samtlige kartleggingsoppgaver (se figur 4.3). Da elevene arbeidet med oppgave 2a, valgte samtlige elever unntatt en å anvende «recursive generalization» som strategi for å løse oppgaven. For at en elev skal kunne bruke «recursive generalization» i oppgavene må eleven oppdage at mønsteret øker med samme tall mellom hver figur. Eksempel på «recursive generalization» illustreres i intervjuet med elev 2.

432 Intervjuer: Da lurer jeg på hvordan du tenkte da du jobbet med oppgave a?

433 Elev 2: Ehh, med a så jeg bare fulgte mønsteret, så kom det liksom pluss 2 på hver.

434 Intervjuer: Ja, okei. Så den økte med 2 hver gang?

435 Elev 2: Ja, så økte jeg med 2 helt til jeg kom frem til 4 og 5.

Elevens svar tyder på at eleven har skjønt at mønsteret økte med 2 sirkler for hver figur. Derfor ble denne strategien kategorisert som «recursive generalization». Til tross for at elev 2 hadde beskrevet «recursive generalization» under intervjuet, hadde elev 2 kun tegnet figur 4 på oppgavearket sitt. Her kunne det virke som elev 2 ikke hadde behov for å tegne den femte figur i oppgave 2, for å oppdage at mønsteret økte med to for hver figur.

Oppdeling av figuren i mindre enheter

En av metodene som ble brukt av elevene er *oppdeling av figuren i mindre enheter*. Metoden går ut på at eleven deler figurnummeret opp i mindre enheter og multipliserer med ulike elementer fra mønsteret og oppgaven. For eksempel i oppgave 4 skulle elevene finne antall klistremerker det var på en lengde med 20, 50 og 127 kuber. Eksempelet illustrerer oppgave 4b ved samtale mellom elev 5 og intervjuer om lengde på 50 og 127 kuber.

920 Intervjuer: Hvordan tenkte du på 50 da?

921 Elev 5: Da gjorde jeg det samme. Bare kanskje litt annerledes. Jeg tok 50 ganger 4, og det blir 200. Så tok jeg pluss 2, som er de som er 5 på siden. Og da ble det 202.

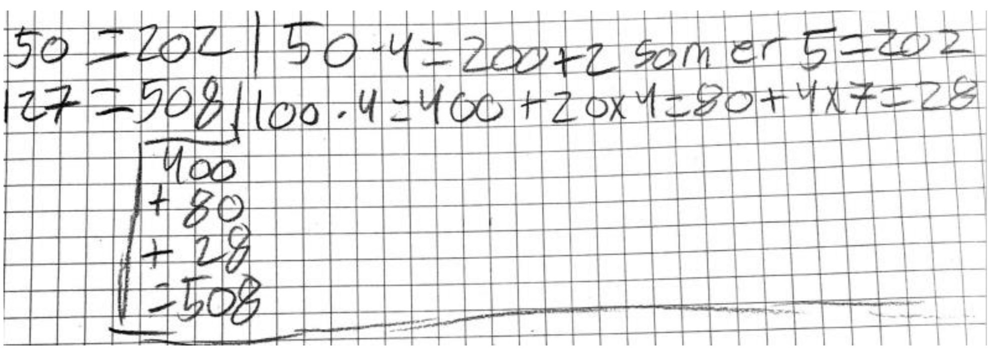
922 Intervjuer: Ja, for da tok du 4 siden det økte med 4 hver gang?

923 Elev 5: Mhm.

924 Intervjuer: Og på 127?

925 Elev 5: På 127 tok jeg 100 ganger 4, som er 400. Pluss 20 ganger 2, siden det er 127. Så tok jeg 4 ganger 7, som er 28. Også plussa jeg bare alle sammen.

Selv om elev 5 ikke hadde delt opp «lengden på 50 kuber» i like mange enheter som en lengde på 127 kuber, valgte jeg allikevel å ta med «lengde på 50 kuber» for å vise at elev 5 har forstått mønsteret i oppgaven. I en lengde på 127 kuber hadde elev 5 valgt å dele 127 først opp i 100 og multiplisere med 4 siden det er den faste økningen mellom hver figur. Deretter gjorde elev 5 samme prosedyren med 20 og 7. Til slutt valgte elev 5 og addere sammen alle oppdelingene. Elev 5 glemte å addere på 2, slik han gjorde ved en lengde på 50 kuber, som resulterte i at svaret ikke ble korrekt. Tankegangen illustreres gjennom utregning på ark (se figur 4.7), hentet fra arbeidet elev 5 gjorde ved gruppeobservasjonen.



Figur 4.7 - eksempel på oppdeling av figuren i mindre enheter

Analyse av aritmetisk generalisering med korrekt svar

Radford (2009) beskriver hensikten med oppgaveformuleringen til deloppgavene, og målene med deloppgavene. I oppgave 2a, som involverer tegning av figur fire og frem, ønsket Radford (2009) at elevene skulle oppdage «recursive generalization». Basert på resultatene fra mitt datamateriale, benyttet nesten alle elevene, med unntak av én, «recursive generalization» som generaliseringsstrategi i oppgave 2a. Radford (2009) argumenterer videre for at denne generaliseringsstrategien ville være mest hensiktsmessig for lavere figurtall, for eksempel figurmunrene 1-10. Han mente at «recursive generalization» ville være mindre praktisk ved høyere figurtall, som for eksempel figur 100 eller 1000 (Radford, 2009, ss. XXXIX-XL). Dette kan relateres til min datainnsamling, da ingen av elevene i studien min valgte å benytte «recursive generalization» ved oppgave som krevde beregning av antall i figurtall over 10.

Oppgave 3 fra Becker og Rivera (2006) fokuserte på generaliseringsstrategiene «generalizing figurally» og «generalizing numerically». De viser til to hendelser med elevene Dung og Marlisha (Becker & Rivera, 2006). Marlisha brukte først generaliseringsstrategien «generalizing figurally», men siden hun ikke klarte å utarbeide en formel fant Becker og Rivera (2006) ut at hun brukte «generalizing numerically». Ut i fra datamaterialet mitt ser jeg at dette kunne være tilfellet for elev 2, elev 5 og elev 6. Til forskjell fra eleven Marlisha brukte ikke elev 2, 5 og 6 «generalizing numerically», men evnet ikke å bruke «generalizing figurally» til hele oppgave 3.

I oppgave 4 som jeg hentet fra Lannin et al. (2006), var formålet fremkalle generaliseringsstrategiene «recursive generalization», «explicit», «whole-obecjt generalization», «chunking» og «counting» (Townsend, 2005, s. 61). Resultater fra min forskning indikerer at elev 1 og elev 4 tok i bruk «recursive generalization», og spesielt ved oppgave 4a. «Counting» ble i midlertidig ikke tatt i bruk ved oppgave 4 hos noen av elevene. «Recursive generalization» var den generaliseringsstrategien som ble brukt mest i forhold til kartleggingsoppgavene. Den ble brukt hele 27 ganger totalt i arbeid med kartleggingsoppgavene (se figur 4.3), men kun 3 ganger til oppgave 4. Generaliseringsstrategien «chunking» ble ikke benyttet under kartleggingsoppgave 4 eller de andre kartleggingsoppgavene.

4.7 Kategori 7 – Algebraisk generalisering

I dette avsnittet vil jeg først presentere underkategorien 7.1 *Algebraisk generalisering uten notasjon*. Jeg vil presentere *algebraisk generalisering uten notasjon* med relevant generaliseringsstrategi og typiske eksempler fra datamateriale. Videre vil jeg presentere en analysedel og resultater fra andre forskere angående funnene i kategorien 7.*1 algebraisk generalisering uten notasjon*. Da jeg har presentert underkategori 7.1, vil jeg ta for meg underkategori 7.2 *algebraisk generalisering med notasjon*. Jeg vil beskrive underkategori 7.2 og illustrere med relevant generaliseringsstrategi og typiske eksempler for denne underkategorien. Avslutningsvis vil jeg presentere en analysedel og resultater fra relevante forskere i lys av funnene til underkategori 7.2 *algebraisk generalisering med notasjon.*

4.7.1 Algebraisk generalisering uten notasjon

I denne delen vil underkategorien *algebraisk generalisering uten notasjon* presenteres med utgangspunkt i eksempler fra datamaterialet. Deretter vil det bli gjort en analyse av underkategorien 7.1 *algebraisk generalisering uten notasjon* i lys av relevant teori.

Kategorien «algebraisk generalisering uten notasjon» er den nest høyeste graden av generalitet, og tar utgangspunkt i Radford's (2010) beskrivelse av algebraisk generalisering. Typisk for denne underkategorien er at eleven forstår mønsterets egenskaper og oppbygning og forklarer det gjennom å bruke matematiske begreper, men ikke evner å lage en formel. Av den grunn blir kategorien kalt «algebraisk generalisering uten notasjon». Eleven har kompetanse til å generalisere figurmønsteret verbalt, men ikke til å anvende algebraisk notasjon for å uttrykke figurmønsterets oppbygning.

Generaliseringsstrategien «generalizing figurally» fra Becker & Rivera (2006) var en av metodene som ble brukt mest av elevene i studien min. For at en elev skal anvende «generalizing figurally» må eleven ta utgangspunkt i figurene og deres egenskaper, for å deretter kunne beskrive mønsteret sitt struktur som gjelder alle figurene i figurmønsteret uten algebraiske formler (Rivera & Becker, 2005; Becker & Rivera, 2006). Elever som bruker «generalizing figurally uten algebraiske formler» evner ikke å lage en algebraisk formel, men har forståelse av mønsteret slik at hen vil kunne finne hvilken som helst figur. Oppgave 3 åpnet i stor grad for «generalizing numerically» og «generalizing figurally», og i gruppeobservasjonen viste elev 1 og elev 3 forståelse av mønsteret i oppgave 3 ved bruk av «generalizing figurally uten algebraisk formel».

118 Elev 3: Det blir jo bare større og større for hver gang.

119 Elev 1: Da står det 10 i hver retning. Da blir det 40.

120 Elev 1 og elv 3 samtidig: 41.

121 Elev 1: Og 100? Da står det 400 og 1.

122 Elev 1 og elev 3 samtidig: Og 1.

Her illustrerte elev 1 og elev 3 hvordan de hadde forstått figurene og dens egenskaper gjennom «generalizing figurally uten algebraiske symboler». Elevene forstod at hver «arm» ville være like lange og inneholde like mange kvadrater som figurnummeret. I intervjuet bekreftet elevene deres forståelse av «generalizing figurally uten algebraiske symboler». Videre i intervjuet ble elevene bedt om å finne antall kvadrater i figurnummer 75. Her svarte elevene at de ville ta antall kvadrater i hver arm, som er 75, og addere med hverandre fire ganger siden figurene har fire «armer» eller multiplisert 75 med fire.

Et annet eksempel på «generalizing figurally uten algebraiske symboler» illustreres av elev 5 til oppgave 4.

916 Intervjuer: Hvordan tenkte du på oppgave a da?

917 Elev 5: Tok jeg første, er det 5 som er synlig også alt resten er 4 helt til siste igjen, da blir det 5.

Elevens svar indikerer at eleven har skjønt at kubene på endene vil ha 5 synlige klistremerker og at kubene imellom vil ha 4 synlige klistremerker. Da jeg spurte elev 5 om han kunne lage en formel for kartleggingsoppgave 4 svarte han på følgende måte:

926 Intervjuer: På oppgave c? Klarte du å lage en formel?

927 Elev 5: Alt imellom er 4, men du starter.. første er 5 og siste er 5.

Utsagn 927 fra elev 5 indikerer at elev 5 har forstått mønsteret til kartleggingsoppgave 4, men ikke evnet å utarbeide en formel som inneholder notasjon.

Analyse av algebraisk generalisering uten notasjon

Eksemplene som er vist i sammenheng med underkategori 7.1 kan knyttes til «generalizing figurally uten algebraisk symboler» og resultater fra min datainnsamling. Elevene fra min studie strevde med algebraisk notasjon i oppgaver som krevde utforming av en formel. Nesten samtlige elever var innom «algebraisk generalisering uten notasjon» minst en gang i løpet av arbeidet med kartleggingsoppgaver, utenom elev 4.

Rivera og Becker (2005; 2006) ønsket gjennom oppgaveformuleringen i oppgave 3b, som spurte etter en formel for antall kvadrater i figur n og forklaring på hvordan man kom frem til formelen, at elevene skulle vise en matematisk kompetanse uten å nødvendigvis bruke en generell formell. Resultater fra min datainnsamling illustrerte at oppgave 3b, som ga elevene mulighet til å uttrykke seg, og der samtlige elever brukte en form for argumentasjon. Det vil si at elevene i min studie ga uttrykk for hvordan de ønsket å løse oppgave 3b enten i intervjuet eller gruppeobservasjonen. Elev 3 var den eneste eleven som tydelig brukte «generalizing figurally» til oppgave 3b, men evnet ikke å lage en formel.

Amit og Neria (2004) observerte at elevene var i stand til å gjenkjenne og fullføre figurmønstre, men hadde vanskeligheter med å uttrykke overgangen mellom figurene ved en formel til en vilkårlig n. Dette var i stor grad tilfellet i min studie også. Fire av seks elever fra min studie evnet ikke å utarbeide en algebraisk korrekt formel, som kan skyldes lite erfaringer med utforming av formler og algebraisk generalisering.

4.7.2 Algebraisk generalisering med notasjon

I dette avsnittet vil jeg presentere eksempler på *algebraisk generalisering med notasjon* med utgangspunkt i generaliseringsstrategier fra studien min. Deretter vil det bli gjort en analyse med teori og eksempler fra datainnsamlingen.

«Algebraisk generalisering» går ut på å utarbeide en generell regel uansett hvilket tall- og figurmønster som presenteres. Underkategorien 7.2 «algebraisk generalisering med notasjon» innebærer en høyere grad av generalitet i matematikken. Elevene i underkategorien 7.2 brukte algebraisk notasjon til å forklare mønsterets oppbygning i kartleggingsoppgavene. Her vil eleven etablere sammenheng mellom figur og figurtall, slik at eleven kan generalisere mønstrene og bestemme antall objekter i større figurer. Dessuten vil eleven ha evnen til å formidle algebraiske generaliseringer ved algebraisk notasjon. En av de viktigste egenskapene i «algebraisk generalisering med notasjon» er å kunne beskrive mønsterets oppbygning ved å bruke både tall og bokstaver.

Et av eksemplene fra studien min illustreres av elev 4 i arbeid med oppgave 3a, som brukte «generalizing figurally med algebraiske symboler»

Eksempel 1:

825 Intervjuer: Oppgave 3, hvordan opplevde du den?

826 Elev 4: Det var ganske.. egentlig bare samme greia. Bare at da ganget jeg med 4, ganget tallet med fire istedenfor 2.

827 Intervjuer: Mhm, hvor fikk du tallet fire fra?

828 Elev 4: Fordi det blir en på hver (elev 4 peker på alle fire «armene» på figuren ved oppg. 3)

829 Intervjuer: Åja, så du tok utgangspunkt i figuren?

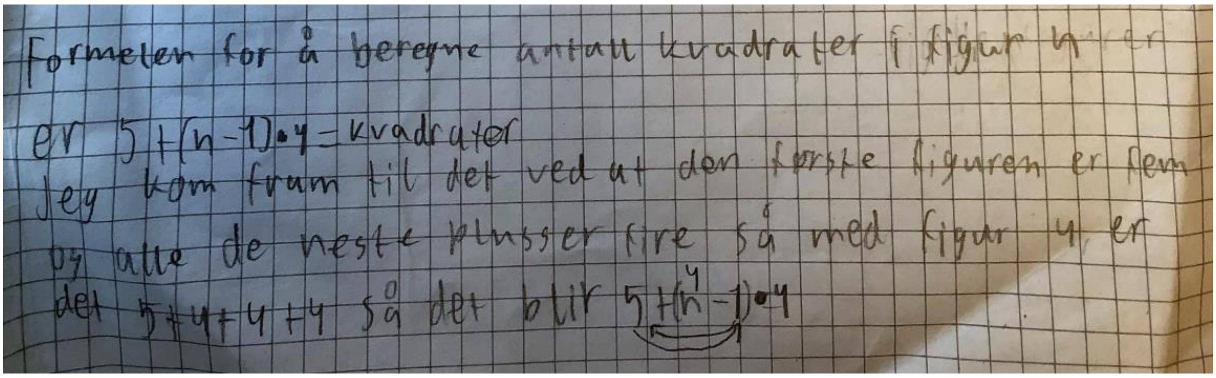
830 Elev 4: Ja.

831 Intervjuer: Ja, okei. Ehh, og da har du jo.. Hvordan kom du fram til, eller hvordan tenkte du da når du kom fram til 10'ern?

832 Elev 4: Da tok jeg samme greia. N minus 1, ganget med 4, pluss 5. For første begynner med fem (peker på figur 1 ved oppgave 3), også neste figur blir det fire til så der kommer n minus 1 inn.

Det første å legge merke til var utsagn 826. Elev 4 brukte nesten samme tankeprosess i utforming av en formel som han gjorde i oppgave 2, der den faste økningen var to. I oppgave 3 indikerte elev 4 at den faste økningen var fire. Det andre å bemerke seg var at eleven fortalte at han fokuserte på figuren og ikke tallene, som er et viktig aspekt i «generalizing figurally med algebraisk symboler». Måten elev 4 kom frem til en formel var med utgangspunkt i den faste økningen på fire, og at første figur i oppgave 3 hadde fem kvadrater. Deretter skjønte elev 4 at for å finne neste figur i rekken måtte han ta n minus en. Dette resulterte i formelen i utsagn 832, «n minus 1, ganget med 4, pluss 5».

Her ser man at elev 4 beskriver formelen som er utarbeidet og hvordan elev 4 har tenkt under kartleggingsoppgave 1.



Figur 4.8 - elev 4 sitt svar på oppgave 3a.

På oppgavearket til elev 4 beskrev han formelen på følgende måte: «Jeg kom fram til det ved at den første figuren er fem og alle de neste plusser fire så med figur 4 er det $5 + 4 + 4 + 4$ så det bli $5 + (n - 1) * 4$». Et viktig element å bemerke seg i elev 4 sitt utsagn 832 og forklaring i samtalen om oppgave 3 er at han ikke forklarte overgangen mellom å legge til fire i hver figur og $(n - 1)$.

Eksempel 2:

Eksempel 2 er hentet fra intervjuet med elev 1 og gruppeobservasjonen mellom elev 1,2 og 3. Først presenteres samtalen mellom elev 1 og intervjuer angående utførelsen av oppgave 4.

407 Intervjuer: Hvordan gjorde du oppgave c?

408 Elev 1: Ehh, hvilken som helst lengde. Altså n minus 2 gange 4 pluss 10.

I intervjuet ble det ikke spurt hvor elev 1 fikk tallene fra eller hvorfor eleven valgte å bruke akkurat disse tallene, men i gruppeobservasjonen forklarte elev 1 hvordan han hadde kommet frem til denne eleven til elev 2 og 3. Elevene snakket om hvor mange klistremerker de fant til en lengde på 20, 50 og 127 kuber. Videre beskrev elev 1 tankegangen bak formelen i gruppeobservasjonen på følgende måte:

267 Elev 1: Det jeg fant ut da, hvis jeg skal regne det ut. Så kan du ta. For da har vi n minus 2, for da tar du vekk endene. Så har du klossene, også ganger du det med 4 for da får du sidene også plusser du på 10, for det er de to klossene du tok vekk.

Analyse av algebraisk generalisering med notasjon

Samtlige kartleggingsoppgaver i studien min avsluttet med spørsmål om utforming av en formel med n. Dette skapte mye forvirring og mange spørsmål om hvordan elevene skulle angripe oppgaven. Radford (2009) har i likhet med spørsmålene til kartleggingsoppgave 2a, 2b og 2c hatt en hensikt med oppgaveformuleringen til oppgave 2d. Oppgave 2d spør etter en formel for antall sirkler i figur n, som er konsekvent stilt for å fremme «symbolic generalization» (Radford, 2009, s. XLI-XLII). Resultater fra oppgave 2d indikerte at kun elev 4 klarte å utarbeide en korrekt formel for figurmønsteret, mens elev 1 utarbeidet en ukorrekt formel og de resterende elevene ikke utarbeidet en formel.

Ved analyse av likhetene mellom funnene til Becker og Rivera (2006) og min datainnsamling til oppgave 3, vil elev 1 og 4 sammenlignes med eleven Dung. I Becker og Rivera (2006) fant de ut at Dung klarte å se fire «armer» med antall kvadrater ut i fra figurnummeret og et fast kvadrat i midten. Videre brukte Dung multiplikasjon som en strategi, der han multipliserte figurnummeret med fire og legge til 1. Elev 1 og 4 i min forskning viste begge til «generalizing figurally», og brukte multiplikasjon som en strategi for å finne mønsteret i figurer ved å multiplisere med 4 og legge til 1. De utarbeidet deretter en formel ved hjelp av denne strategien, lignende det som ble gjort av eleven Dung i artikkelen til Becker og Rivera (2006).

Duval (2006) hevder at overgangen fra språket til symbolsk språkbruk er krevende og utfordrende i matematikken. Dette kom tydelig frem i min forskning, der det kun var to elever som klarte å lage korrekte formler. Dessuten spurte elevene hva som mentes med formler med n. Elevene forstod ikke hvordan de skulle lage en formel for et mønster der de tok i bruk en bokstav, og samtidig passet til alle figurene og figurtallene i mønsteret.

5. Drøfting

Forskningsspørsmålet i min studie var «Hvilke løsningsstrategier tar elever på 8.trinn i bruk i møte ved figurmønstre?». I kapittel 4 har jeg analysert åttendeklasse elevers bruk av løsningsstrategier i møte med figurmønsteroppgaver. I analysen fant jeg ut at elevene anvendte ulike nivåer av generalitet, der noen av fremgangsmåtene deres ikke kan kategoriseres som en generaliseringsstrategi. Enkelte av elevene har brukt «løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering» og «generaliseringsstrategier» som jeg ikke har funnet i faglitteraturen. Dette førte til at jeg måtte definere nye «løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering» og «generaliseringsstrategier». I dette kapittelet vil jeg diskutere funnene opp mot relevant litteratur. Avsnitt 5.1 vil gi en generell fremstilling av løsningsstrategiene elevene i studien min brukte i lys av relevant teori. Videre vil jeg i avsnitt 5.2 avslutte med diskusjon av mine funn fra hver kartleggingsoppgave, og se dem i sammenheng med funnene tidligere forskere fant til oppgavene.

5.1 Fremstilling av generaliseringsprosessen

Jeg vil i dette avsnittet beskrive en generell fremstilling av elevens bruk av løsningsstrategier i lys av den kategoriseringen jeg har beskrevet i kapittel 4. Deretter vil jeg drøfte funnene med utgangspunkt fra tabellen i figur 4.2, 4.3 og andre teoretikeres funn.

Hensikten med studien er å beskrive hvilke løsningsstrategier elevene tar i bruk i møte figurmønsteroppgaver. Resultater fra studien min indikerer at elever bruker «generaliseringsstrategier» (kategori 5-7), som både gir feil og riktig svar, i større grad enn «løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering» (kategori 2-4). Figur 4.3 viser at elever brukte generaliseringsstrategier som befinner seg i kategori 6 «aritmetisk generalisering med korrekt svar» med generaliseringsstrategiene «recursive generalization» og «oppdeling av figuren i mindre enheter» flest ganger. I denne kategorien vil generaliseringsstrategiene gi et korrekt svar. Til tross for dette funnet er det verdt å bemerke seg at elevene brukte løsningsstrategier som ga feil svar oftere enn løsningsstrategier som ga riktig svar. Dette funnet hevder jeg kan ha en sammenheng med elevenes dårlige resultater innenfor algebra i TIMSS-undersøkelsene fra 2015 og 2019 (Kaarstein et al., 2020). Av den grunn mener jeg at det ikke er overraskende at elevene ikke scorer høyt i slike tester.

Den generaliseringsstrategien som gikk igjen flest ganger var «recursive generalization» (se figur 4.3). «Recursive generalization» krever ikke høy kompetanse innen algebraisk tenkning, ettersom at denne generaliseringsstrategien krever at eleven oppdager et mønster i figurens oppbygning. Radford (2009) mener at det vil være ideelt å bruke «recursive generalization» ved arbeid med lavere figurer, for eksempel gjennom figurnumre fra 1-10. Allikevel syntes jeg det er overraskende at «recursive generalization» ble brukt i så stor grad da kun noen få deloppgaver ønsket å fremme «recursive generalization». I kartleggingsoppgavene var det kun oppgave 2 og 4 som ønsket å fremme «recursive generalization», men «recursive generalization» ble brukt i samtlige kartleggingsoppgaver av elevene i studien min.

Et tydelig funn i studien min var at elevene ikke hadde tilstrekkelig god nok kompetanse innen algebraisk tenkning. Zazkis og Liljedahl (2002) mener at algebraisk tenkning innebærer å generalisere mønstre og regler, og mestre arbeid med symboler og notasjon på en effektiv måte. Basert på figur 4.2 kan man se at alle elevene mestret å oppfatte oppgavens mønstret algebraisk minst en gang i løpet av studien. Det som var tydelig var at ikke alle elevene mestret arbeid med symboler og notasjon, som kun elev 1 og elev 4 gjorde. Under studien spurte samtlige elever om hva som mentes med formel med en vilkårlig n. Elevene i studien min forstod ikke hvordan de skulle lage en formel for mønsteret der de tok i bruk en bokstav, og samtidig passet til alle figurene og figurtallene i mønsteret. Denne tendensen har en sammenheng med Amit og Nera (2004) sine funn. De fant ut at elevene i deres studie var i stand til å gjenkjenne og fullføre figurmønstre, men at de hadde problemer med å finne en formel som kunne brukes til å beskrive hvordan figurene forandret seg når antallet elementer økte til et vilkårlig tall n (Amit & Nera, 2004). En annen grunn kan være at elevene ikke hadde hatt mye trening med symboler og notasjon i matematikken, siden studien ble gjennomført i starten av temaet «algebra» i matematikken. Dette kan ha resultert i at elevene i min studie ikke har kunnet utviklet den algebraiske tenkningen i matematikken, som igjen kan bekreftes ved TIMSS-resultatene (Kaarstein et al., 2020).

Videre er det viktig å legge merke til at det er store forskjeller på elevens grad av generalitet innenfor de ulike oppgavene. Zazkis og Liljedahl (2002) mener at notasjon innen algebraisk tenkning kan oppleves kompliserende og forvirrende. I figur 4.2 kan man se at flertallet av elevene ikke hadde kompetansen til å oppnå den høyeste graden av generalitet. En av grunnene til dette kan være at elevene akkurat hadde startet med algebra i matematikken, og ikke har hatt mulighet til å lære om figurmønstre eller generalisering. Dessuten hadde ikke elevene hatt noe fokus på symboler og forståelse av hva symbolene representerer. I matematikken har elever utfordringer med å forstå symbolene og hva de representerer, og med lite undervisning innenfor algebra vil det ikke være overraskende at kun to elever i min studie oppnådde den høyeste graden av generalisering. Dette kan være et resultat av at elevene i min studie ikke har arbeidet tilstrekkelig med generalisering av figurmønstre og arbeid med notasjon innen algebraisk tenkning kan anses krevende og forvirrende.

Radford (2006; 2010) hevder at elever som har forståelse av symboler og tegn i matematiske ideer og relasjoner er bedre rustet til algebraisk tenkning. Kategori 7.2 «Algebraisk generalisering med notasjon» var den kategorien som ble brukt tredje mest i arbeid med kartleggingsoppgavene. Til tross for dette var det kun to av elevene i studien min som evnet å lage en algebraisk formel som var korrekt. Basert på figur 4.2 kan man se at elev 1 brukte «algebraisk generalisering med notasjon» 12 ganger og elev 4 brukte samme generaliseringsstrategi 14 ganger. Typisk for elev 1 og elev 4 var at de lagde en formel i starten av oppgaven og brukte formel for å besvare de resterende oppgavene til mønsteret. Dette illustrerer at elev 1 og 4 har utviklet den algebraiske tenkningen til å kunne besvare oppgavene.

Lee (1996) mener at et av hovedproblemene med figurmønstre i matematikken for elever er ikke å finne mønsteret, men å oppfatte mønsteret algebraisk. Dette utsagnet fra Lee (1996) er både passende og motstridene til mine funn. Resultater fra figur 4.2 viser at elevene i min studie brukte «algebraisk generalisering uten notasjon» 23 ganger som strider mot Lee (1996) påstand. Til tross for at kategorien «algebraisk generalisering uten notasjon» ikke bruker notasjon i utformingen av formel, går kategorien ut på å oppfatte mønsteret algebraisk slik Lee (1996) mener var et problem innen figurmønster. Dessuten brukte elevene i studien min en grad av algebraisk generalisering minimum en gang i løpet av studien. Sett på et annet vis brukte elevene i min studie løsningsstrategier som kategoriseres som generaliseringsstrategier i større grad enn løsningsstrategier som er aritmetiske eller løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering.

I en av Lee's (1996) undersøkelser ble det funnet ut at nesten samtlige av elevene som ble spurt kunne se mønsterets oppbygning, og at en av utfordringene i artikkelen var å beskrive mønsteret og figurenes egenskap på en matematisk og presis måte. Resultater fra min studie indikerer at dette funnet ikke var like dominerende. Kategori 3 «Strategier som er uspesifisert» innebærer strategier elever i studien brukte som var forklart upresist. Basert på figur 4.2 var det kun to elever fra min studie som ble kategorisert under «strategier som er uspesifisert», og den kategorien som ble benyttet nest minst. Resultater fra studien min viser at «whole-object generalization» var den fjerde mest brukte generaliseringsstrategien og kategori 5 «Ufullstendig aritmetisk generalisering med ukorrekt svar» ble brukt 28 ganger. Det var den nest mest brukte kategorien som elevene benyttet seg av. Lannin (2005) konkluderer med at elevens forståelse av gyldighet av deres generalisering er avgjørende når en bruker figurmønster i klasserommet. Til tross for «whole-object generalization» resultatet illustrerer figur 4.2 at tre av de fire mest brukte kategoriene i studien er de tre høyeste gradene av generalitet i min kategorisering. Dette tyder på at elevene i studien min evnet i stor grad å reflektere over gyldigheten i generaliseringene sine.

Et av mine funn var at elevene i studien min tok flere ganger ikke i bruk generaliseringsstrategier, men «løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering». Elevene i min studie brukte ulike «løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering» 19 ganger for å løse kartleggingsoppgavene i løpet av gruppeobservasjonene og intervjuene. Dette er en motsetning til et av Lannin (2005) sine funn. Lannin (2005) skriver at forskning har vist at figurmønster kan oppmuntre elevene til å lage generaliseringene sine. Et av mine kriterier for at elevene skulle få delta i min studie var at elevene var motiverte for det. Ut i fra Lannin (2005) sin forskning syntes jeg det er interessant at elevene i min studie i visse tilfeller ikke utformet en generalisering ved arbeid med figurmønster, da figurmønster skulle oppmuntre til generalisering.

I studien min brukte elevene generaliseringsstrategier som innebærer bruk av det muntlige og skriftlige språket som kan indikerer at elevene i stor grad mestret et presist språk ved formuleringene av generaliseringsstrategier. Ut i fra figur 4.2 og 4.3 ble strategien «uspesifisert» brukt seks ganger av to elever i løpet av studien. Radford (2010) hevdet at det er en sammenheng mellom språket og generalisering av figurmønster. Videre hevdet han at språkets struktur og muligheter for abstraksjon og generalisering påvirker hvordan elevene forstår og behandler mønstrene. Til tross for dette syntes jeg det er interessant at ingen av elevene brukte generaliseringsstrategien «contextual generalization» som skal fremme det skriftlige språket til eleven. Radford (2010) mente også at gjennom språket skulle matematiske termer og symboler bidra til å skape en klar og entydig beskrivelse av mønstrene, og dermed gjøre det lettere for elevene å generalisere. Funn fra mine studier indikerer at majoriteten av løsningsstrategiene som ble brukt i studien min var generaliseringsstrategier. Ut ifra figur 4.2 var det bare to av elevene fra min studie som brukte algebraiske symboler i beskrivelsen av mønstrene. Dette kan ha en sammenheng med Duval (2006) sitt funn, som hevdet at overgangen fra språket til symbolsk språkbruk er krevende og utfordrende i matematikken.

5.2 Diskusjon av teoretiske funn av kartleggingsoppgaver i lys av mine funn

Et av kriteriene mine til valg av kartleggingsoppgaver var at de skulle gi rom for flere generaliseringsstrategier enn de som ble nevnt av de ulike forskerne. Resultater fra min studie har vist at elevene brukte andre løsningsstrategier enn det forskerne ønsket å fremme eller vise til. I dette avsnittet vil jeg diskutere dette funnet og andre funn jeg fant, og se det i sammenheng med forskeres funn.

5.2.1 Kartleggingsoppgave 1 og 3

I forbindelse med oppgave 1 ønsket Rivera og Becker (2005) å få elevene til å bruke «generalizing numerically» og» generalizing figurally» ut i fra oppgaveformuleringen. I min studie brukte ingen av elevene tydelig «generalizing numerically» i noen av kartleggingsoppgavene, som jeg syntes er veldig interessant ettersom Rivera og Becker (2005) sine deltakere brukte denne generaliseringsstrategien. «Generalizing figurally med og uten notasjon» var generaliseringsstrategier som ble brukt i stor grad i min studie til oppgave 1 og 3, men også noe i oppgave 2 og 4. Resultater fra min studie viser at kun elev 1 var den eneste eleven som brukte «generalizing figurally med og uten notasjon» ved arbeid med denne oppgaven. Basert på disse funnene syntes jeg det er interessant at «generalizing figurally med og uten notasjon» ble brukt tilsammen 49 ganger i løpet av gruppeobservasjonen og intervjuene, men kun en elev i min studie brukte det til oppgave 1. Jeg tror at sannsynligheten for at elevene hadde brukt en av disse generaliseringsstrategiene hadde vært større dersom denne oppgaven kom senere i oppgavesettet. Dette tror jeg har en sammenheng med at elevene ikke hadde kommet i gang med tankeprosessen i arbeid med algebra og figurmønstre. Jeg syntes også det er bemerkelsesverdig at ingen av elevene brukte «generalizing numerically» i noen av oppgavene. Det vil derfor vært spennende og sett om andre elever ved annen klasse eller skole hadde gitt de samme resultatene.

Becker & Rivera fremhever i sine artikler mye til generaliseringsstrategiene «generalizing figurally» og «generalizing numerically». I oppgave 3 fra Rivera og Becker (2006) ønsker de å se om elevene tar i bruk disse to generaliseringsstrategiene. I motsetning til oppgave 1, brukte fire av elevene i studien min «generalizing figurally med og uten notasjon» minimum en gang i arbeid med oppgave 3. Min påstand om at elevene ikke hadde kommet i gang med tankeprosessen i arbeid med figurmønsteret underbygges, ettersom at elevene har brukt «generalizing figurally» ved en senere oppgave hentet fra de samme forskerne. Dette indikerer at eleven har kompetansen til å kunne se figurmønsteret ut i fra figurene og deres egenskaper.

5.2.2 Kartleggingsoppgave 2

I Radford (2009) sin studie påpeker han at det var ulike hensikter med oppgaveformuleringen. I oppgave 2a ønsket Radford (2009) å få frem «recursive generalization», da elevene arbeidet med oppgave 2a. Fem av seks elever fra studien min brukte «recursive generalization» i arbeid med oppgave 2a. I oppgave 2b ville Radford (2009) få elevene til å bruke «factual generalization», mens i oppgave 2c ønsket Raford (2009) å fremme «contextual generalization». I min studie brukte ingen av elevene mine «factual generalization» eller «contextual generalization» i noen av kartleggingsoppgavene. Jeg syntes dette er interessant hvordan elevene i studien til Radford (2009; 2010) bruker de generaliseringsstrategiene som var meningen å fremme i oppgave 2b og 2c, men ingen av elevene i min studie gjorde det. En grunn kan være at elevene ved min studie ikke hadde utviklet god algebraisk tenkning til å kunne oppfatte mønsteret slik at de kunne bruke «factual generalization» og «contextual generalization». På en annen side evnet to av elevene i studien min å utarbeid en formel, slik Radford (2009) ønsket med oppgaven 2d. Dette indikerer at minimum to av elevene i min studie burde hatt god nok matematisk kunnskap eller algebraisk tenkning til å kunne bruke «factual generalization» og «contextual generalization» til å svare på oppgavene. Hvorfor mine funn er annerledes fra Radford (2009) syntes jeg er spennende, men vanskelig å gi en begrunnelse for.

5.2.3 Kartleggingsoppgave 4

Kube-problemet er hentet fra Lannin et al. (2006), men Lannin brukte oppgaven også i artikkelen sin fra 2005. Der skrev Lannin (2005, s. 252) at oppgaven skulle hjelpe elevene til å forstå og mestre mønsteret på grunn av at den tillater bruk av geometriske figurer og visuelle representasjoner av regler og problemer. Et av funnene fra studien var at noen av elevene ikke klarte å forstå oppgavens problem og mønsterets oppbygning, som resulterte til ufullstendige aritmetiske generaliseringer som ga ukorrekt svar. To av seks elever fra studien min brukte generaliseringsstrategien «recursive generalization ved feilaktige tallverdier» til kartleggingsoppgave 4. Dessuten uttrykte flere av elevene at denne oppgaven var av det vanskelige slaget, som ikke harmonerer med Lannin (2005) forskning. Til tross for dette klarte over halvparten av elevene å løse oppgavene korrekt.

Lee (1996) fant ut at dersom elevene klart å se mønsteret på flere måter, økte sannsynligheten for at elevene kunne oppdage mønsteret algebraisk. Ved arbeid med denne oppgaven ble det brukt ulike løsningsstrategier, hvor majoriteten var generaliseringsstrategier som kategoriseres som «algebraisk generalisering». I min studie ble det ikke dokumentert gjennom gruppeobservasjonen og intervjuene at de oppdaget mønstrene i kartleggingsoppgavene på flere måter for å oppdage mønsteret algebraisk. I intervjuet med elev 3 forklarte han at han prøvde å se mønsteret slik som elev 1, uten å lykkes. Dette resulterte også i en feil aritmetisk generalisering, mens elev 1 brukte en algebraisk generalisering med notasjon i oppgave 4.

Lannin et al. (2006) fant ut at elevene i studien sin tok i bruk følgende generaliseringsstrategier «explicit», «recursive generalization», «whole-object generalization», «chunking» og «counting» basert på utformingen av oppgaveteksten. Elevene i min studie tok i bruk tre av disse fem generaliseringsstrategiene, explict, recursive generalization og counting. Dette synes jeg er fascinerende siden kartleggingsoppgave 4 er den oppgaven som i størst grad bruker generaliseringsstrategier som forskerne ønsket og tenkte. Et av kriteriene for valg av kartleggingsoppgaver var at de skulle åpne for flere løsningsstrategier enn det forskerne la opp til. Resultater fra min studie indikerer at elevene brukte i stor grad generaliseringsstrategier som Lannin et al. (2006) ønsket, men også andre løsningsstrategier. Dette indikerer at kartleggingsoppgave 4 oppfylte delvis kriteriet til valg av oppgaver. Jeg syntes også det er interessant hvordan «whole-object generalization» har blitt brukt fjerde mest i studien min, men ikke blitt brukt en gang i oppgave 4 som la opp til denne generaliseringsstrategien.

6. Avslutning

Formålet med denne masteroppgaven har vært å besvare forskningsspørsmålet: «Hvilke løsningsstrategier tar elever på 8.trinn i bruk ved figurmønstre?». For å besvare forskningsspørsmålet mitt har jeg gjennomført videoobservasjon av seks elever fordelt på to grupper, etterfulgt med et videointervju av hver elev. Kartleggingsoppgavene som var hentet fra tidligere faglitteratur, ble benyttet under observasjonene. I analysen min utarbeidet jeg en kategorisering av elevenes løsningsstrategier i lys av nivåene på strategiene, og i den siste delen av oppgaven drøftet jeg funnene ut fra resultater fra analysen og teori.

Jeg har i denne oppgaven sett på hvilke løsningsstrategier elever brukte i møte med oppgaver om figurmønstre. Det jeg fant ut var at elevene i studien min har stor variasjon av hvilket nivå løsningsstrategier de tar i bruk. Samtlige elever hadde tilstrekkelig av algebraisk tenkning til å anvende en generaliseringsstrategi som var aritmetisk, og resultere i et korrekt svar. Resultater indikerte at «recursive generalization» var den generaliseringsstrategien som ble benyttet mest under studien.

Studien min tar ikke utgangspunkt i hvordan læreren legger opp til utvikling av algebraisk tenkning innen algebra og figurmønstre, men fokuserer på elevenes bruk av løsningsstrategier. Funn fra studien min viser at elevene brukte løsningsstrategier som ikke kan kategoriseres som en generaliseringsstrategi, og som ga et ukorrekt svar. Til tross for det, ble «løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering» benyttet i en mindre grad enn generaliseringsstrategier. Dette resultatet harmonerer med Mason et al. (2011) sin påstand om at generalisering bør implementeres i alle matematiske emner, og at dersom læreren ikke gir elevene mulighet til å generalisere er det ikke en matematikktime.

I arbeid med denne studien har jeg lært at elevenes bruk av løsningsstrategier kan variere i nivået av generaliseringen. Dessuten har jeg observert og lært at elever trenger å bli utfordret i skriftspråket og algebraisk notasjon i arbeid innenfor algebra og figurmønstre. Jeg tror en av grunnene til at elevene varierte i graden på generaliseringen av figurmønstre har en sammenheng med at gjennomføringen av studien ble gjort i startfasen av temaet «algebra». Resultater fra min studie kan tyde på at elevene har arbeidet med aritmetikk før, men at de har arbeidet mindre med generalisering og algebraisk notasjon. Jeg tror at disse ferdighetene kan utvikles av elevene i løpet av skolegangen, siden algebraisk tenkning og generalisering er blitt stadig viktigere i matematikkundervisningen.

Konklusjonen min er at elever bruker generaliseringsstrategier mer en løsningsstrategier som ikke innebærer generalisering. Videre kan det konkluderes med at generaliseringsstrategier som kategoriseres som aritmetiske ble benyttet hyppigst. Deretter av generaliseringsstrategier som kategoriseres som algebraiske, både med og uten notasjon. Denne konklusjonen harmonerer med at «recursive generalization» var generaliseringsstrategien som elevene i studien min benyttet mest.

6.1 Videre forskning

I min studie har jeg undersøkt hvilke løsningsstrategier elever på 8.trinn benytter seg av når de møter figurmønstre. Resultatene fra analysen er drøftet og konkludert i de foregående avsnittene. I arbeid med oppgaven har det oppstått nye interesseområder som hadde vært spennende og forsket på. Mye faglitteratur trekker fram figurmønster som en introduksjon til algebraen. Av den grunn hadde vært spennende å sett forskjell på resultatene dersom en gruppe elever hadde hatt figurmønster som introduksjon til algebra, og en annen gruppe ikke hadde hatt det. Det ville vært spennende å sett om elevene med figurmønster som introduksjon presterte bedre og utviklet en høyere algebraisk tenkning, enn elevene som ikke hadde figurmønster som introduksjon. Det hadde også vært spennende å sett om resultatene ble like mine, dersom studien ble gjennomført på en annen skole med en annen lærer eller om jentene hadde gitt andre resultater enn guttene.

Litteraturliste

Amita, M. & Neria, D. (2004). Students’ preference of non-algebraic representations in mathematical communication. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Edaucation, 3*, 409-416.

Barbosa, A. & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European teacher Education Network, 10*, 57-70.

Becker, J. R. & Rivera, F. (2006). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth-grade level. I. J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková (Red.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (4.utg. s. 465-472). PME.

Bryman, A. (2016). *Sosial Research Methods*. Oxford University Press.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6.utg.). Routledge.

Dalland, C. P. & Hølland, S. (2021). Analyse av kategorisering av videodata. I E. Andersson-Bakken & C. P. Dalland (Red.), *Metoder i klasseromsforskning: Forskningsdesign, datainnsamling og analyse* (s. 263-286). Universitetsforlaget.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z.

Dysthe, O. (2001). Sosiokulturelle teoriperspektiv på kunnskap og læring. I Dysthe, O. (Red.). *Dialog, samspell og læring* (s. 33-72). Abstrakt forlag.

English, L. D. & Warren, E. A. (1998). Introducing the Variable through Pattern Exploration. *Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Eriksen, H. & Svanes, I. K. (2021). Analyse av kategorisering av videodata. I E. Andersson-Bakken & C. P. Dalland (Red.), *Metoder i klasseromsforskning: Forskningsdesign, datainnsamling og analyse* (s. 287-304). Universitetsforlaget.

Hinna, K. R., Ringvold, R. A., & Gustavsen, T. S. (2016). *QED 5-10*. Cappel Damm Akademisk.

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.C., Nilsen, T. & Bergem, O.K. (2020). *TIMSS 2019. Kortrapport*. Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo.

Karlsen, L. (2014). *Tenk det!: Utforskning, forståelse og samarbeid – elever som tenker sjæl i matematikk.* Cappelen Damm Akademisk.

Kiliç, Ç. (2016). Analyzing middle school students' figural pattern generating strategies depending on a linear number pattern. *Journal of Theory and Practice in Education, 12*(6), 1205-1230.

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3.utg.). Gyldendal Akademisk.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7*(3), 231-258.* https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic Generalisations Strategies: Factors Influencing Student Strategy Selection. *Mathematics Education Research Journal, 3*(18), 3-28.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 87-106). Kluwer Academic Publishers.

Liljedahl, P. (2021). *Buildning Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning*. Sage Publications Inc.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' Understanding of Algebraic Notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1-19.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (65-86). Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2011). *Å lære algebraisk tenkning* (J. Lie, Overs.). Developing Thinking in Algebra. (Opprinnelig utgitt 2005). Caspar Forlag AS.

Sikt. (u.å). *Samtykke og andre behandlingsgrunnlag.* Sikt. https://sikt.no/samtykke-og-andre-behandlingsgrunnlag.

Postholm, M. & Jacobsen, D. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm Akademisk.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. I S. Alatorre, J. L. Cortin, M. Sáiz & A. Méndez (Red.), *Proceedings of* *the 28th annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 2-21). PME-NA

Radford, L. (2009). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. I V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Red.), *Proceedings of CERME 6* (s. XXXIII-LIII). INRP 2010. Plenary 1.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2003). The effects of figural and numerical cues on the induction processes of preservice elementary teachers. I N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Red.), *Proceedings of the Join Meeting PME and PMNEA* (s. 63-70). University of Hawaii.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2005). Teacher to teacher: Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(4), 198-203.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147–164. https://doi.org/10.1007/BF00579460.

Strømvåg, H. (2017). Et miljø for algebraisk generalisering og dets innvirkning på studenters matematiske aktivitet. *Nordic Studies in Mathematics Education, 22*(2), 71-91.

Tjora, A. (2021). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (4. utg.). Gyldendal Akademisk.

Townsend, B. (2005). *Examining secondary students' algebraic reasoning: flexibility and strategy use* [Doktorgradsavhandling, The Faculty of the Graduate School University of Missouri-Columbia]. https://mospace.umsystem.edu/xmlui/bitstream/handle/10355/4131/research.pdf?sequence=3.

Utdanningsdirektoratet. (2013, juni). *Utdanningsspeilet 2013: Tall og analyse av barnehager og grunnopplæring i Norge*. Udir. https://www.udir.no/globalassets/filer/tall-og-forskning/rapporter/utdanningsspeilet_2013/us2013.pdf.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob.

Vale, I. & Cabrita, I. (2008). Learning through patterns: a powerful approach to algebraic thinking. I K. Kumpulainen & A. Toom (Red.), *ETEN 18: The Proceedings of the 18th Annual Conference of the European Teacher Education Network* (s. 63-69). ETEN, University of Helsinki, Department of Applied Sciences of Education and CICERO Learning, University of Helsinki.

Wittek, L. (2021). Sosiokulturelle tilnærminger til læring. I J. Heldal & L. Wittek (Red.), *Pedagogikk – en grunnbok* (s. 47-63). Cappelen Damm Akademisk.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 379-402.

Vedlegg

Vedlegg 1: Vurdering fra Sikt

Sikt

Meldeskjema / Generaliseringsstrategier ved figurmønster på 8.trinn / Vurdering

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer	Vurderingstype	Dato
592304	Standard	06.07.2022

Prosjekttittel
Generaliseringsstrategier ved figurmønster på 8.trinn

Behandlingsansvarlig institusjon
NLA Høgskolen AS

Prosjektansvarlig
Andreas Lorange

Student
Hedda Skjelbreid Rønningen

Prosjektperiode
01.09.2022 - 30.06.2023

Kategorier personopplysninger
Alminnelige

Lovlig grunnlag
Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 30.06.2023.

Meldeskjema

Kommentar
OM VURDERINGEN
Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

VIKTIG INFORMASJON TIL DEG
Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 30.06.2023.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
Personverntjenester vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

-lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
-formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål

-dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
-lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Personverntjenester vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring, videosamtale o.l.) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:

https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Personverntjenester vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

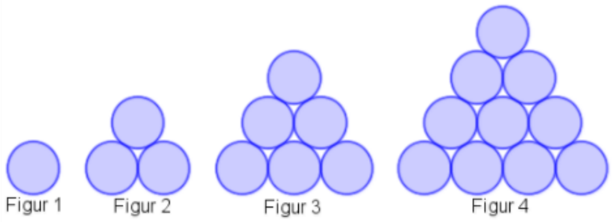
Kontaktperson hos oss: Line Raknes Hjellvik

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2: Informasjonsskrivet til deltakere og foresatte i studien

Kan barnet ditt delta i forskningsprosjektet innenfor matematikk «Generalisering av figurmønster på 8.trinn»?

Jeg er en femteårsstudent på NLA Høgskolen og skal skrive en masteroppgave om hvordan elever på 8.trinn skal løse en matematikk oppgave. Oppgavene vil handle om figurmønster (se bilde). I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva eventuell deltakelse vil innebære for barnet ditt.



Formål
Generalisering har fått en sentral del i den nye læreplanen, LK20, og er et av kjerneelementene i matematikk. Generalisering handler om at elevene oppdager sammenhenger og strukturer i matematikken. Tidligere forskning viser at figurmønster er viktig for elevers kunnskap og forståelse innen algebra og matematikk. Derfor er jeg interessert i å se hvilke generaliseringsstrategier elever på 8.trinn tar i bruk ved figurmønster og hvordan de begrunner generaliseringene sine.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Jeg er ansvarlig for prosjektet, men samarbeider tett med veilederen min fra NLA Høgskolen.

Hvorfor får du spørsmål om ditt barn kan delta?
Du får spørsmål om dette fordi barnet ditt går i 8.trinn, skal ha om figurmønster og at skolen barnet ditt går på har godtatt at jeg kan gjennomføre prosjektet her. Ditt barn kan bidra til at den norske skolen lærer av dette og blir en enda bedre skole i fremtiden.

Hva innebærer det for barnet ditt å delta?
De barna som deltar i prosjektet vil følge klassens fagplan, som vil si at de gjennomfører prosjektet samtidig som klassen har matematikk. Gjennomføringen av prosjektet vil skje to ganger på et grupperom med 3 elever der de vil få utdelt oppgaver knyttet til ulike figurmønstre. Jeg er til stede og filmer elevene mens de jobber. Elevene vil få hvert sitt notatark som vil bli kopiert. Jeg vil fungere som en passiv hjelpelærer som vil hjelpe elevene dersom det skulle trenges. Når jeg er ferdig med videoobservasjonen vil jeg gjennomføre et intervju med hver enkelt elev for å kunne gå i dybden med hvordan de har begrunnet generaliseringene sine. Intervjuene vil bli filmet. Opplysningene som samles inn vil altså bestå av video, intervju og oppgavearket.

Hva skjer med elevene som ikke deltar?
Dersom barnet ditt ikke deltar pga. det ikke er ønskelig eller ikke blir valgt ut, vil barnet ditt følge vanlig undervisning med faglærer og resten av klassen.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. For at barnet ditt skal kunne delta i prosjektet må barnet ditt og foresatte samtykke ved deltakelse. Samtykket kan du eller barnet ditt trekke tilbake når som helst uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger om barnet ditt vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller barnet ditt hvis du ikke vil at barnet ditt skal delta, eller hvis du senere velger å trekke barnet ditt fra forskningsprosjektet.

Uavhengig om barnet ditt velger å delta eller ikke vil det ikke ha noe å si for vurderingene på skolen, og deltakelse er ikke et krav skolen stiller. Som foresatt har man rett til å se intervjuguiden på forhånd.

Ditt barns personvern – hvordan jeg oppbevarer og bruker opplysningene?
Jeg vil bare bruke opplysningene om barnet ditt til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Jeg behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Fra NLA Høgskolen vil kun veilederen min, førstelektor Andreas Lorange og jeg ha tilgang til dataene som samles inn. Jeg vil gjennomføre følgende tiltak for at ingen uvedkommende skal få tilgang til personopplysningene:

- På de notatene som kopieres, vil det bli påskrevet fiktive navn, og disse vil lagres innelåst.
- Skannede versjoner av notater og videoopptak vil bli lagret på et Onedrive område som kun jeg og Andreas Lorange vil ha tilgang til.

I publikasjoner knyttet til forskningsprosjektet vil følgende tiltak være gjennomført for å ivareta personvernet til de barna som deltar i forskningsprosjektet:
- Hvis jeg tar med stillbilder fra videoopptakene, vil ansikter eller annet som kan være personidentifiserende være klippet bort.
- Transkripsjoner vil være anonymisert.

Hva skjer med opplysningene dine når jeg avslutter forskningsprosjektet?
Datainnsamlingen avsluttes 31.januar 2023, men opplysningene lagres frem til 30. juni 2023 for videre analyse og forskning. Da anonymiseres opplysningene og video- og skjermopptak slettes.

Dine rettigheter
Så lenge barnet ditt kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om barnet ditt, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om barnet ditt,
- å få slettet personopplysninger om barnet ditt, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av personopplysninger til barnet ditt.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Jeg behandler opplysninger om barnet ditt basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra NLA Høgskolen har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Masterstudent ved NLA Høgskolen, Hedda Skjelbreid Rønningen (epost: hedda4life@gmail.com, tlf.: 92013433)
- Førstelektor ved NLA Høgskolen, Andreas Lorange (epost: Andreas.Lorange@NLA.no, tlf: 98838636)

- NLAs personvernombud, Inger Johanne-Gamlem Njau (epost: personvernombud@nla.no, tlf.: 55540749)

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS (epost: personverntjenester@nsd.no, tlf: 55 58 21 17)

Med vennlig hilsen
Hedda Skjelbreid Rønningen
(Forsker)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om masterprosjektet. Jeg samtykker til

- ☐ at barnet mitt kan filmes i forbindelse med prosjektet
- ☐ at skriftlige notater blir kopiert.
- ☐ at opplysninger om barnet mitt behandles frem til 31.juni 2023

Telefonnummer foresatte:

(Elevens navn)

(Signatur av foresatt til eleven, dato)

Vedlegg 3: Kartleggingsoppgavene

Oppgave 1

Antall kvadrater	1	2	3
Antall tannpirkere	4	7	10

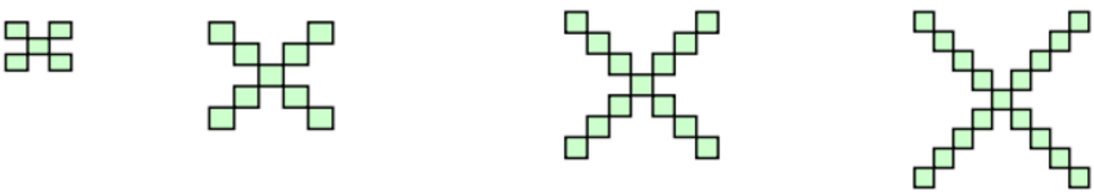
a) Hvor mange tannpirkere trengs for å lage 4 kvadrater?
b) Hvor mange tannpirkere trengs for å lage 5 kvadrater?
c) Hvor mange tannpirkere trengs for n kvadrater?

Oppgave 2

Figur 1 **Figur 2** **Figur 3**

a) Tegn figur 4 og 5.
b) Finn antall sirkler i figur 10 og 100.
c) Skriv en melding til en elev i en annen klasse om hvordan man kan finne antall sirkler i en hvilken som helst figur.
d) Lag en formel for antall sirkler i figur n.

Oppgave 3

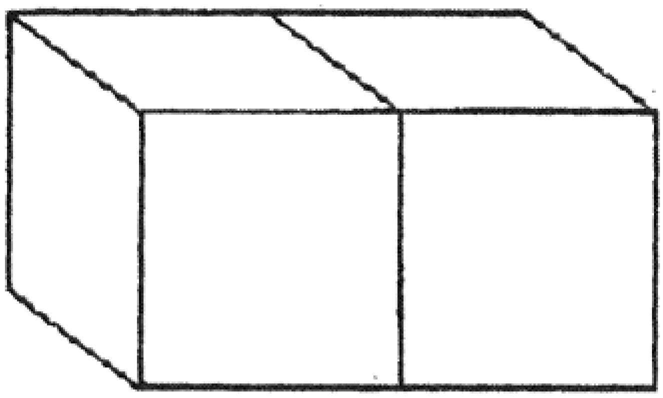


Figur 1 **Figur 2** **Figur 3** **Figur 4**

a) Finn kvadrat i figur 10 og figur 100.
b) Finn en formel som gjør det mulig å beregne antall kvadrater i figur n? Hvordan kom du frem til formelen?

Oppgave 4

Et firma lager stenger ved å sette sammen kuber på rad og bruker en klistremerkemaskin til å sette «smilefjes»-klistremerker på stengene. Maskinen plasserer nøyaktig et klistremerke på hver synlig side av hver kube. Hver synlig side av hver kube må ha et klistremerke, så en lengde på 2 vil trenge 10 klistremerker.



a) Hvor mange klistremerker trenger du for stenger med en lengde til 1 til 10? Forklar hvordan du kom frem til dette.
b) Hvor mange klistremerker vil du trenge for en stang med lengde på 20? En lengde på 50? En lengde på 127? Forklar hvordan du kom frem til dette.
c) Forklar hvordan du kan finne antall klistremerker som trengs for en stang med hvilken som helst lengde. Skriv en regel som kan brukes for å bestemme dette.

Vedlegg 4: Intervjuguide

1. Hvordan opplevde du oppgavene?
2. Hvordan tenkte du da du løste denne oppgaven?

Spørsmål 1 og 2 vil bli stilt til i forbindelse med alle oppgavene, men oppgave 3 vil få følgende tilleggsspørsmål:

I oppgave 3 vil spørsmål 1 og 2 bli stilt, men følgende oppgaver vil også bli stilt:

a) Hvis løsningen er numerically, vil følgende spørsmål bli stilt: Er det en måte å forklare formelen din ut i fra figurene.

b) Hvor mange kvadrater vil det være i figur 75? Forklar.

c) Kan du tenke deg en annen måte finne en formel?