Geometrisk tenkning i møte med læreverk

En kvantitativ innholdsanalyse av forklaringer og oppgaver fra et digitalt læreverk i matematikk tilpasset 9. trinn.

Malin Åsebø Olsvoll

Masteroppgave i matematikk ved NLA Høgskolen Bergen

Våren 2023

Veileder: Andreas Lorange

Sammendrag

Geometri er et fagområde med mange muligheter til å tilpasse opplæringen for elever på ulike nivå av forståelse i matematikk. Denne studien tar utgangspunkt i van Hieles teori om geometrisk tenkning. Med teorien som rammeverk, søker denne studien å finne ut av hvilke nivåer av geometrisk tenkning som kreves av elever for å forstå forklaringer og løse oppgaver i et digitalt læreverk, Campus Matte for 9. trinn. Samtidig er et sentralt forskningsspørsmål om det finnes en sammenheng mellom nivå av geometrisk tenkning som kreves for å løse oppgaver og vanskelighetsgraden på nivådifferensierte oppgaver i læreverket. For å finne svar på studiens forskningsspørsmål, har det blitt utviklet et analyseverktøy basert på teori og forskning om geometrisk tenkning. Læreverket analyseres gjennom kvantitativ innholdsanalyse.

Resultatene viser at elever på alle nivåer av geometrisk tenkning kan forstå deler av forklaringene læreverket gir, men at elever på høyere nivåer vil forstå større andeler av dem. Av de analyserte oppgavene, finnes det flere oppgaver som kan løses av elever på ulike nivåer av geometrisk tenkning. I tillegg avdekkes det at det ikke finnes noen sammenheng mellom nivå av geometrisk tenkning som kreves for å løse en oppgave og vanskelighetsgraden læreverket har satt på den.

Abstract

Geometry is an area in mathematics that offers many opportunities for differentiated learning for student with varying degrees of mathematical understanding. This study is based on van Hieles theory of mathematical thinking. Using this theory as a framework, this study aims to determine the levels of thinking required by student to understand explanations and solve tasks in a web-based learning resource, Campus Matte intended for 9th grade in Norwegian schools. At the same time, a key research question is whether there is a correlation between the level of geometric thinking required to solve a task and the difficulty level of differentiated tasks in the learning resource. To answer the research questions in this study, an analytical tool has been developed based on theory and research on geometric thinking. The learning resource is analyzed through quantitative content analysis.

The results show that students at all levels of geometric thinking can understand parts of the explanations provided in the textbook, but students at higher levels will understand larger proportions of them. Among the analyzed tasks, there are several that can be solved by students at different levels of geometric thinking. Additionally, it is revealed that there is no correlation between the level of geometric thinking required to solve a task and the difficulty level set by the textbook.

Forord

Jeg vil dedikere oppgaven til min morfar «Besten» som kommenterte når jeg fortalte om karrierevalget mitt: «skal du virkelig kaste bort evnene dine på å bli lærer?». Hvis han hadde vært her og sett hva jeg har oppnådd nå, tror jeg han ville vært stolt, til tross for sin skepsis til valget.

Masteroppgaven markerer slutten på grunnskolelærerutdanningen ved NLA høgskolen. De har lagt til rette for et kjekt og lærerikt studieløp jeg ikke ville vært foruten.

Jeg vil takke min veileder gjennom dette siste året, Andreas Lorange. Han har vært en profesjonell, hjelpsom og inspirerende veileder. Jeg hadde aldri kommet i mål uten deg.

I tillegg ønsker jeg å takke de fine studievennene for at dere har gjort studietiden så bra. Dere er fantastiske, og jeg er stolt over hva vi har fått til sammen.

Jeg vil også takke min samboer for at han har støttet meg og holdt ut med meg gjennom et til (mange) tider frustrerende og krevende skoleår. Spesielt takk for at du har laget mat til meg når jeg har vært stresset. Jeg kunne ikke bedt om en bedre støttespiller.

Så vil jeg takke de som har vært der for meg siden starten og heiet meg frem gjennom livet. Mamma og pappa, takk for at dere nok en gang har stilt opp for meg og hjulpet meg med gode tilbakemeldinger og korrekturlesing. Hils til de tre firbeinte og si takk for at de har tålt tvangskos når jeg har trengt det.

Til slutt vil jeg takke Campus Inkrement som har vært positive til prosjektet og behjelpelige med spørsmål.

Malin Åsebø Olsvoll
Bergen, 2023

Kontaktinformasjon: molsvollm@gmail.com

Innholdsfortegnelse

Sammendrag **3**

Abstract **4**

Forord **5**

1.0 Innledning **9**

1.1 Valg og presentasjon av læreverk *10*
1.1.1 Sentrale begreper i læreverket 11

1.3 Presentasjon av problemstilling og forskningsspørsmål *12*

1.3 Avgrensinger i oppgaven *13*

1.4 Disposisjon *13*

2.0 Teoretisk bakgrunn **15**

2.1 van Hieles teori om geometrisk tenkning *15*
2.1.1 Forskning på van Hiele-teorien 17

2.2 Nivåindikatorer til geometrisk tenkning *18*
2.2.1 Todimensjonale figurer 18
2.2.2 Tredimensjonale figurer 25

2.4 Tidligere forskning *27*
2.4.1 van Hiele-nivåer i læreverk 27

3.0 Metode **31**

3.1 Forskningsdesign og forskningsmetode *31*

3.2 Analyseverktøy *32*

3.3 Anvendelse av analyseverktøy *53*
3.3.1 Anvendelse av analyseverktøyet til analyse av forklaringer i videoer 53
3.3.2 Anvendelse av analyseverktøyet til analyse av kontrollspørsmål og oppgaver 54

3.4 Empiriske data *55*
3.4.1 Forelesninger 56
3.4.2. Oppgaver 58

3.5 Validitet og reliabilitet *59*

3.6 Etiske betraktninger *59*

4.0 Analyse **61**

4.1 Analyse av forklaringer i forelesninger *63*
4.1.1 Nivå 1: Forklaringer elever på det første nivået og høyere vil forstå 63
4.1.2 Nivå 2: Forklaringer elever på det andre nivået og høyere vil forstå 66
4.1.3 Nivå 3: Forklaringer elever på det tredje nivået og høyere vil forstå 70

4.2 Analyse av kontrolloppgaver i forelesninger *71*
4.2.1 Nivå 1: Oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 1 eller høyere 71
4.2.2 Oppgaver uten mulighet til å avgi korrekt svar 74

4.3 Analyse av oppgavesamling *77*
4.3.1 Nivå 1:Oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 1 eller høyere. 77
4.3.2 Nivå 2: Oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 2 eller høyere. 80
4.3.3 Nivå 3: Oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 3 eller høyere. 84

4.4 Antall forekomster av de ulike nivåene *86*
4.4.1 Forekomst av de ulike nivåene i forelesninger 86
4.4.2 Forekomst av de ulike nivåene i oppgavesamlinger 89

5.0 Diskusjon og konklusjon **93**
5.1 Forelesninger *93*
5.2 Oppgavesamlinger *95*
5.3 Konklusjon *96*
5.4 Implikasjoner *97*

6.0 Videre forskning **98**

7.0 Litteraturliste **99**

Vedlegg **103**
Vedlegg 1: Oversikt over kontrolloppgaver, oppgavetype og tildelt van Hiele-nivå fra leksjonen «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer. *103*
Vedlegg 2: Oversikt over kontrolloppgaver, oppgavetype og tildelt van Hiele-nivå fra leksjonen «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer. *104*
Vedlegg 3: Oversikt over oppgaver fra oppgavesamlingen, løype, oppgavetype og tildelt van Hiele-nivå fra leksjonen «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer. *105*
Vedlegg 4: Oversikt over oppgaver fra oppgavesamlingen, løype, oppgavetype og tildelt van Hiele-nivå fra leksjonen «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer. *107*

1.0 Innledning

Geometri er et spesielt interessant område innenfor matematikk fordi det er åpent for mange ulike tilnærminger og er en stor del av livet vårt gjennom alt fra arkitektur til design (Jones, 2001). I tillegg skriver Jones (2001) at geometri kan appellere til våre visuelle, estetiske og intuitive sanser. Derfor er geometri et fagområde som er spesielt egnet for å gi elever praktiske erfaringer, kunnskaper og en mulighet til å være kreativ (Jones, 2001; Hoffer, 1981). Dette medfører at geometri har et potensiale til å fange interessen til elever, spesielt de elevene som vanligvis har et anstrengt forhold til matematikk. I tillegg kan geometri by på teoretiske utfordringer, for eksempel gjennom læring av matematiske bevis. På bakgrunn av dette vil jeg argumentere for at geometri er et fagområde med mange engasjerende muligheter for elever på alle kompetansenivåer i matematikk.

Det er lovfestet at opplæringen i skolen skal tilpasses evnene og forutsetningene til enkelteleven (Opplæringslova, 1998, §1-3). Derfor må også opplæring i geometri tilpasses enkeltelevens evner og forutsetninger. Denne studien tar utgangspunkt i en teori som beskriver ulike nivåer av geometrisk tenkning og hva elever evner på de ulike nivåene. Teorien refereres til som van Hieles teori og blir forklart gjennom teoridelen (kapittel 2.1). Dermed sier også teorien noe om hvilke forutsetninger elever har på de ulike nivåene av geometrisk tenkning. På bakgrunn av dette mener jeg den kan og bør brukes når man skal tilpasse geometriopplæring for elevene. Mye forskning har blitt gjort for å undersøke hvilke nivå av geometrisk tenkning elever tenker på (f.eks. Alex & Mammen, 2012; Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988; Gutiérrez et al., 1991; Usiskin, 1982). Derimot har det blitt gjort lite forskning på hvilke nivåer av geometrisk tenkning læringsinnhold elever arbeidet med i geometriundervisning passer til, som forklaringer og oppgaver. For at elever skal få mulighet til å arbeide med innhold de har forutsetninger for å mestre, mener jeg vi må se innholdet i lys av teorien om geometrisk tenkning.

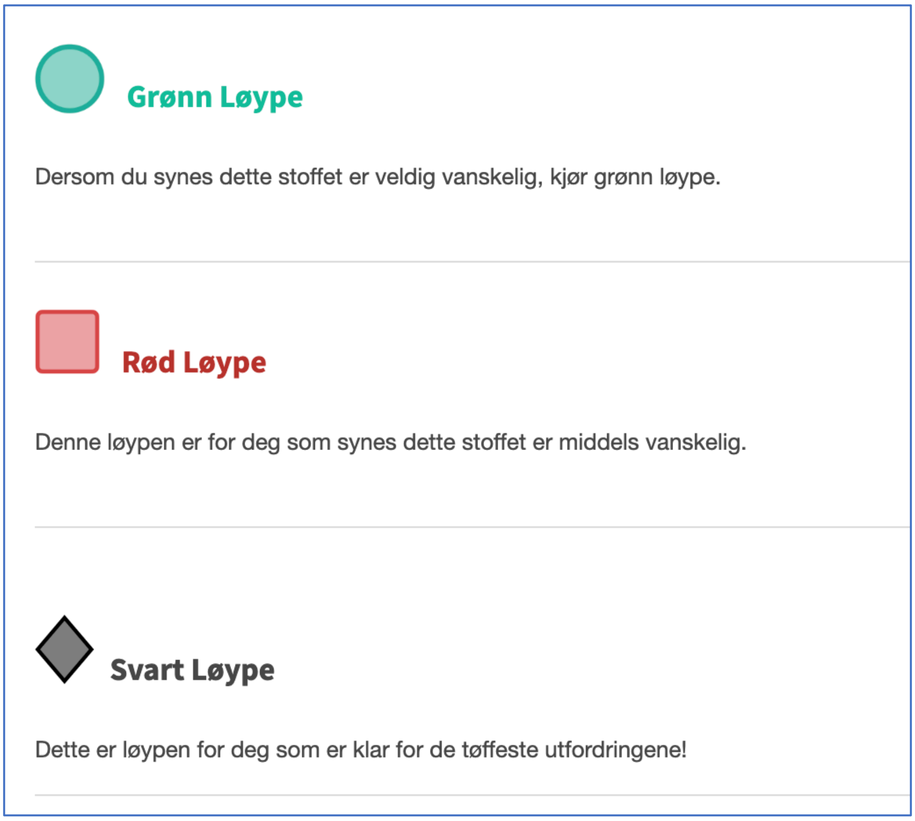
Gjennom denne masteroppgaven ønsker jeg derfor å komme med et bidrag til forskningsfeltet gjennom å analysere innhold elever arbeider med når de lærer geometri på skolen gjennom forklaringer og oppgaver. Ifølge fagfornyelsen LK20 skal elever lære om og arbeide med geometri på 6. og 9. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2020). Fordi det er en større sjanse for at det kreves flere og høyere nivåer av geometrisk tenkning på 9. trinn enn 6. trinn, vil jeg i denne studien undersøke innhold tilpasset 9. trinn. Innholdet som analyseres i denne studien hentes fra et dagsaktuelt digitalt læreverk. I neste delkapittel vil jeg presentere læreverket og begrunne valget. Deretter vil jeg presentere oppgavens problemstilling og forskningsspørsmål.

1.1 Valg og presentasjon av læreverk

Fordi læreverket som analyseres i denne studien er sentral for problemstillingen og forskningsspørsmål, vil jeg først presentere læreverket. Et læreverk defineres av utdanningsdirektoratet som «pakker» av læremidler som dekker en større del av læreplanverket (Utdanningsdirektoratet, 2021). Læremidler kjennetegnes ved at de er utviklet til å brukes i opplæringen, de brukes regelmessig og dekker elementer i læreplanverket. I forskrift til opplæringsloven beskrives læremidler som «alle trykte, ikkje-trykte og digitale element som er utvikla til bruk i opplæringa. Dei kan vere enkeltståande eller gå inn i ein heilskap, og dekkjer aleine eller til saman kompetansemål i Læreplanverket for Kunnskapsløftet.» (Forskrift til opplæringslova, 2006, § 17-1).

Med bakgrunn i fagfornyelsen LK20 ønsket jeg å analysere et læreverk som er tilpasset den nye læreplanen. Samtidig beveger vi oss inn i en tid hvor skolene tar i bruk digitale læreverk fremfor analoge læreverk som tradisjonelle lærebøker. For å gjøre studien min tidsaktuell og fremtidsrettet, vil jeg derfor analysere et digitalt læreverk. Campus Matte er et slikt læreverk og blir brukt i undervisning av tusenvis av lærere over hele landet ifølge deres nettside. I tillegg hevder Campus Matte at læreverket legger vekt på tilpasset opplæring, hvilket gjør læreverket spesielt interessant å analysere i forhold til det jeg beskrev i innledningen. Læreverket er en del av tjenesten Campus Inkrement. Campus Inkrement er nettbasert og innholdet utvikles av pedagoger som hevdes å ha lang erfaring med norsk skole.

Campus Matte 8-10 forklares som et komplett læreverk og ble lansert i 2019. Med komplett læreverk mener Campus Inkrement at det inneholder teori, oppgaver, prøver og aktiviteter som kan gjennomføres i klasserommet. Campus Inkrement skriver på nettsiden at læreverket inneholder nivådifferensierte oppgaver. Oppgavene er delt inn i 3 nivåer basert på vanskelighetsgrad hvor grønn løype inneholder de letteste oppgavene, rød løype har middels vanskelighetsgrad og svart løype inneholder de vanskeligste oppgavene.



Figur 1.1. Beskrivelse av nivådifferensiering på Campus Matte (Campus Inkrement, 2021).

1.1.1 Sentrale begreper i læreverket

I denne studien skal jeg analysere to delkapitler fra læreverket som omhandler egenskaper til to- og tredimensjonale figurer. Videre i oppgaven vil jeg bruke noen av begrepene Campus Matte bruker om innholdet i læreverket. Begrepene defineres under, og vil illustreres videre i kapittel 3.4.

Forelesning: Består av et sett med korte videoer hvor det ofte er kontrollspørsmål mellom. På slutten av hver forelesning kan eleven evaluere hvor godt den forstod innholdet og hva den syntes var vanskeligst. Evalueringsdelen er ikke en del av min studie. Det begrunnes i kapittel 3.4.

Oppgavesamling: Samling av nivådifferensierte oppgaver elever kan jobbe med innenfor delkapitlet.

Video: Forelesninger på Campus Matte inneholder flere videoer som forklarer relevant teori med dynamiske representasjoner og bilder. Læreverket kaller videoene teori, men jeg vil for enkelthetens skyld kalle dem videoer.

Kontrolloppgave: Oppgaver mellom videoene i forelesningene. Disse er ment for at eleven kan kontrollere om den har forstått innholdet i videoene og i noen tilfeller for å hente frem forkunnskaper.
Leksjon: Delkapittel som blant annet inneholder forelesning og oppgavesamlinger.

1.3 Presentasjon av problemstilling og forskningsspørsmål

På bakgrunn av innledningen over, samt beskrivelsen av læreverket skal jeg gjennom kvantitativ innholdsanalyse analysere deler av Campus Matte 9. Dette gjøres med utgangspunkt i følgende problemstilling.

Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for å forstå forklaringer og løse oppgaver innenfor egenskaper til geometriske figurer i Campus Matte 9, og hvilken sammenheng finnes mellom vanskelighetsgrad på oppgavene og nivåene som kreves for å løse dem?

Problemstillingen er omfattende, og jeg ser det derfor som formålstjenlig å dele den opp i forskningsspørsmål. Derfor vil problemstillingen bli besvart utfra forskningsspørsmålene under.

I. Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for å forstå forklaringer i videoene i forelesningene?
II. Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for svare riktig på kontrollspørsmålene i forelesningene?
III. Hvilke nivåer kreves for å løse oppgavene i oppgavesamlingene?
IV. Hvilken sammenheng finnes mellom vanskelighetsgrad på oppgavene i Campus Matte 9 og nivå av geometrisk tenkning som kreves for å løse dem?

For å svare på spørsmål I-III vil jeg bruke et analyseverktøy. Analyseverktøyet som brukes har jeg konstruert med utgangspunkt i anerkjent forskning og teori. Artiklene analyseverktøyet har bakgrunn fra er Burger og Shaughnessy (1986) og Gutiérrez, Jaime og Fortuny (1991) som beskriver hvordan elever tenker, samt hva de kan og ikke kan på hvert nivå av geometrisk tenkning. Grunnen til at jeg tar utgangspunkt i begge artiklene er at den ene beskriver kjennetegn med geometrisk tenkning i forhold til todimensjonale figurer, mens den andre har fokus på tredimensjonale figurer. Relevant teori fra artiklene beskrives i kapittel 2, mens metoden og analyseverktøyet presenteres og forklares i kapittel 3.

Forskningsspørsmål IV besvares gjennom en systematisering av resultatene fra analysen som skal gi svar på forskningsspørsmål III. Ut fra dette lages et diagram som viser hvor mange oppgaver som passer elever på de respektive nivåene av geometrisk tenkning innenfor hver «løype» eller vanskelighetsgrad Campus Matte har satt på oppgavene.

1.3 Avgrensinger i oppgaven

I Campus Matte 9 handler 3 kapitler om geometri. Kapitlene inneholder til sammen 20 leksjoner om geometri. Av to grunner vil jeg avgrense datamaterialet til å bestå av 2 delkapitler, hvor den ene handler om egenskaper til todimensjonale figurer og den andre om egenskaper til tredimensjonale figurer. Den første grunnen til at jeg velger dette, er at jeg har konstruert et analyseverktøy som ikke har blitt brukt med formål om å analysere læreverk før. Derfor mener jeg at for å være så transparent som mulig, må jeg beskrive analysene jeg gjør så presist som mulig. Den andre grunnen til at jeg avgrenser datamaterialet er at analyseverktøyet i seg selv ikke er tilpasset andre temaer innenfor geometri som for eksempel omkrets, areal, overflate og volum. Videre avgrensinger av datamaterialet beskrives og begrunnes i kapittel 3.4.

1.4 Disposisjon

Denne oppgaven inneholder 6 kapitler eksklusiv litteraturliste og vedlegg. Innledningen er oppgavens første kapittel. I det andre kapitlet presenteres teorien studien bygger på som er van Hieles teori om geometrisk tenkning. Videre vil jeg gå i dybden på teorien ved å forklare hva som kjennetegner tenkning på de ulike nivåene i teorien. Deretter presenteres tidligere forskning om van Hiele-teorien i læreverk.

Det tredje kapitlet omhandler metoden i studien. Først beskrives og begrunnes metodevalg. Deretter presenteres og forklares analyseverktøyet jeg har utviklet med bakgrunn i teori fra kapittel 2. Videre beskriver jeg hvordan analyseverktøyet brukes til å gjennomføre analysen. Så beskrives datamaterialet i oppgaven og det illustreres med skjermbilder fra læreverket. Etter det vurderer jeg kvaliteten til studien med hensyn til validitet og reliabilitet. Til slutt skildres de etiske hensynene jeg har tatt i forskningsarbeidet.

Det fjerde kapitlet inneholder analyse av datamaterialet delt inn i tre underkapitler. I underkapitlene analyseres henholdsvis forklaringer fra videoer, kontrollspørsmål fra forelesninger og oppgaver fra oppgavesamlinger. Avslutningsvis presenterer jeg funnene fra analysen og representerer dem i diagram.

I det femte kapitlet besvares forskningsspørsmålene og funnene diskuteres gjennom at de knyttes til tidligere forskning. Deretter brukes svarene på forskningsspørsmålene til å besvare problemstillingen, altså til å konkludere. På slutten av kapitlet reflekterer jeg over hvilke implikasjoner funnene mine har for undervisning i matematikk og vurderer hvordan analyseverktøyet kan videreutvikles.

I det sjette og siste kapitlet deler jeg mine erfaringer fra forskningsfeltet og kommenterer hva mener hva som bør forskes videre på innenfor feltet.

2.0 Teoretisk bakgrunn

Kapitlet starter med beskrivelse av van Hiele-teorien, læringssynet den bygger på og resultater fra forskning som er essensiell for å forstå teorien. Fordi formålet med studien er å undersøke hvilke *nivåer* av geometrisk tenkning som kreves til å forstå videoer og svare riktig på oppgaver i et læreverk, er nivåene svært sentrale for oppgaven. Derfor vil jeg fortsette kapitlet med detaljerte beskrivelser av nivåene som kalles *nivåindikatorer*. Nivåindikatorene danner grunnlaget for analyseverktøyet som presenteres i kapittel 3.2. I den siste delen av kapitlet vil jeg presentere tidligere forskning som jeg vil bruke til å sammenligne resultatene fra min studie med.

2.1 van Hieles teori om geometrisk tenkning

En av de mest anerkjente teoriene om geometrisk tenkning ble utviklet av de nederlandske lærerne Pierre og Dina van Hiele. Teorien har grunnlag i et konstruktivistisk læringssyn og er en forlengelse av Piagets utviklingsstadier (Clements & Sarama, 2004; Levenson et al., 2011). Konstruktivisme er en tilnærming til læring som baseres på at læring er et resultat av «mentale konstruksjoner» (Bada & Olusegun, 2015, s. 66). Med mentale konstruksjoner menes at elever lærer gjennom å koble ny informasjon sammen med kunnskapen de har fra før. Et av de mest sentrale navnene innenfor konstruktivismen er Jean Piaget, som var en av de mest innflytelsesrike forskerne innenfor utviklingspsykologi på 1900-tallet (Huitt & Hummel, 2003; Bada & Olusegun, 2015). Han utviklet en modell i 1936 som kalles «stages of cognitive development» eller kognitive utviklingsstadier. Piaget mente at barn utvikler geometrisk tenkning i stadier etter hvert som det får erfaringer (Levenson et al., 2011). Dermed bygger modellen på idéen om at barn utvikler geometrisk tenkning med alderen (Huitt & Hummel, 2003).

Van Hiele-teorien ble utviklet i 1957, men ble ikke kjent før Wirszup introduserte den til amerikanske lærere i 1976 (Clements & Battista, 1992). Teorien er en veldokumentert beskrivelse av elevers tenkning i geometri og er et gyldig rammeverk for å utvikle undervisning i geometri (Burger & Shaughnessy, 1986; Jaime & Gutiérrez, 1995). Delen av teorien jeg forankrer min studie i er hovedsakelig utformet av Pierre van Hiele. Han skrev i 1999: «I believe that development is more dependent on instruction than on age or biological maturation and that types of instructional experiences can foster, or impede, development» (s. 311). I motsetning til Piaget, mener altså van Hiele at utvikling og alder ikke nødvendigvis hører sammen, men at det er instruksjon som påvirker den kognitive utviklingen til mennesker. Det er tre sider ved van Hieles teori: nivåer av geometrisk tenkning, egenskapene til nivåene og prinsipper om hvordan en elev kan komme seg fra et nivå til et annet (Usiskin, 1982). I hovedsak stod Pierre bak nivåene og deres egenskaper, mens Dina arbeidet mest med hvordan progresjon mellom nivåene foregår. I forhold til problemstillingen er nivåer av geometrisk tenkning og egenskapene til disse relevant. Fordi jeg ønsker å gå i dybden på disse nivåene, vil jeg ikke gå inn på prinsipper om hvordan en elev kommer seg fra et nivå til et annet i denne oppgaven. Fra nå av vil jeg derfor også referere til Pierre van Hiele når jeg skriver van Hiele.

Ifølge teorien utvikles geometrisk tenkning gjennom fem nivåer, som originalt ble kalt nivå 0 til 4 (Fuys et al., 1984, s. 245). Flere forskere har gjennom tid videreutviklet van Hieles nivåer, som har ført til at de har endret seg. Blant annet har amerikanske forskere nummerert nivåene fra 1 til 5 og hvert nivå har fått et navn (Mason, 1998, s. 5). I denne oppgaven vil jeg bruke nivå 1 til 5 primært fordi det vil gi bedre språklig variasjon. Derfor vil jeg kunne variere mellom å eksempelvis skrive nivå 1 og det første nivået. Oversatt til norsk heter nivåene henholdsvis visualisering, analyse, uformell deduksjon, deduksjon og stringens (Smestad, 2008, s. 3). I denne introduseres nivåene i korte trekk, fordi de beskrives mer detaljert i kapittel 2.2. I artikkelen «Developing Geometric Thinking though Activities that Begin with Play» fra 1999 anbefaler Pierre van Hiele selv at man leser Fuys, Geddes og Tischler (1988) for informasjon om van Hiele-nivåene. Derfor vil jeg nå introdusere van Hiele-nivåene med utgangspunkt i Fuys et al. (1988) sine beskrivelser.

- Nivå 1: visualisering. Eleven kan identifisere, navngi, sammenligne og arbeide med geometriske figurer med utgangspunkt i figurenes utseende.
- Nivå 2: analyse. På det andre nivået analyserer eleven figurer med hensyn til delene til figuren og forholdet mellom delene. Eleven kan oppdage egenskaper av og regler for klasser av figurer gjennom aktiviteter og hjelpemidler som bretting, måling, bruk av rutenett eller diagram.
- Nivå 3: uformell deduksjon. Eleven kan relatere egenskaper eller regler de tidligere har oppdaget med hverandre på en logisk måte. Samtidig kan elever på det tredje nivået gi eller følge uformelle argumenter.
- Nivå 4: deduksjon. Elever på det fjerde nivået beviser teoremer deduktivt og etablerer innbyrdes forhold blant nettverk av teoremer.

- Nivå 5: stringens. Eleven etablerer teoremer i ulike postulatsystemer og kan analysere og sammenligne systemene.

2.1.1 Forskning på van Hiele-teorien

Det har blitt gjort mye forskning for å validere van Hieles teori siden den ble introdusert til amerikanske lærere på 70-tallet (Clements & Battista, 1992). Forskning har blant annet funnet at nivåene er hierarkiske (Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1985; Mayberry, 1983; Pegg, 1992, Usiskin, 1982). Det betyr at nivåene er ordnet i en bestemt rekkefølge, hvor hvert nivå bygger på og er avhengig av de tidligere nivåene. Hvert nivå i van Hiele-teorien er altså en forutsetning for å kunne forstå og mestre det neste nivået og det er dermed ikke mulig at en elev hopper over et nivå.

Usiskin (1982) fant at elever kunne tildeles et nivå i henhold til van Hieles teori. Imidlertid oppdaget han også at det kan være vanskelig å tildele et bestemt nivå til elever som befinner seg i overgangen mellom to nivåer. Mayberry (1983) fant at lærere kan være på ulike nivåer i van Hiele-teorien i ulike områder innenfor geometri. Det samme gjelder elever på ungdomstrinnet (Mason, 1989) og elever på videregående nivå (Denis, 1987). At elever kan være på ulike nivåer i ulike områder i geometri betyr eksempelvis at en elev kan være på nivå 1 innenfor todimensjonale figurer og på nivå 2 innenfor tredimensjonale figurer.

Selv om van Hieles nivåer ikke er aldersbestemt, er det i forhold til min problemstilling hvor jeg vil undersøke forekomst av van Hieles nivåer, relevant å se på hvilke nivåer av geometrisk tenkning som er mest vanlig på ungdomsskolen og niende trinn generelt. Usiskin (1982) gjennomførte en studie i USA hvor han tildelte et van Hiele nivå til 2900 10. klasse-elever basert på resultater fra en flervalgprøve. Han fant at de fleste elevene på 10. trinn var på det første eller andre nivået på van Hieles teori. Alex og Mammen (2012) tildelte nivåer til 191 10. klasseelever i Sør-Afrika basert på resultater fra en skriftlig prøve som inneholdt flervalgsoppgaver og andre typer oppgaver. I likhet med Usiskin (1982), fant de at de fleste elevene var på nivå 1 og 2 (henholdsvis 48% og 29%). I tillegg fant de at 14% av elevene tenkte på det tredje nivået og 9% på det fjerde. Forskningslitteraturen viser også at mange elever aldri når nivå 5 (Alex & Mammen, 2012; Mayberry, 1983; Usiskin, 1982). Ifølge Smestad (2008) er verken nivå 4 eller 5 fremtredende i Norge før på høyskolenivå. Fordi fokuset i min studie er på ungdomsskolen, vil jeg bare fokusere på de tre første nivåene videre i oppgaven.

2.2 Nivåindikatorer til geometrisk tenkning

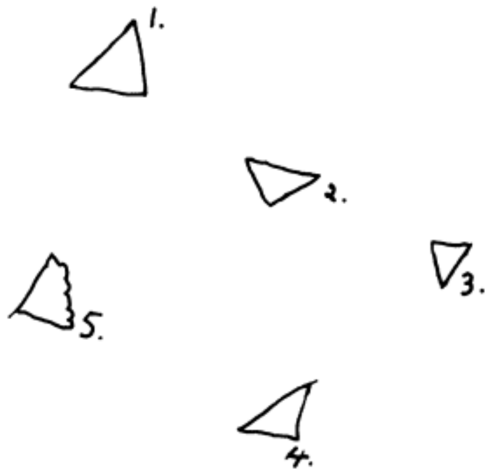
I denne delen skal jeg presentere nivåindikatorer som sier noe om hva som kjennetegner elevers tenkning fra nivå 1-3. Jeg vil presentere nivåindikatorer som beskriver hvordan elever på de ulike nivåene tenker i møte med todimensjonale- og tredimensjonale figurer med utgangspunkt i henholdsvis Burger og Shaughnessy (1986) og Gutiérrez, Jaime og Fortuny (1991). Nivåindikatorene som beskrives i dette delkapitlet danner grunnlaget for analyseverktøyet i studien og vil bli ytterligere forklart i kapittel 3.2.

2.2.1 Todimensjonale figurer

Burger og Shaughnessy (1986) gjennomførte et 3-årig forskningsprosjekt hvor de undersøkte van Hiele nivåene i geometri i skolen. De ønsket å karakterisere van Hiele nivåene fra nivå 1 til 4. Derfor valgte de å analysere intervjuer fra 14 elever fra barnehagealder og opp til studenter som studerte matematikk på høyskolenivå. Empirien ble innsamlet gjennom intervju hvor deltakerne fikk åtte åpne oppgaver som omhandlet todimensjonale geometriske figurer. Oppgavene inkluderte å tegne figurer, identifisere og definere figurer, sortere figurer og delta i uformell og formell tenkning om geometriske figurer. Disse oppgavene var utformet slik at de reflekterte beskrivelsene til nivåene i van Hiele-teorien. Flere forskere ble bedt om å tildele et van Hiele nivå til hver oppgave hver deltaker gjorde ved bruk av van Hieles beskrivelse av nivåene. Nivået som ble tildelt skulle representere det mest fremtredende nivået av tenking vist av deltakeren på oppgaven. Etter alle oppgavene var besvart av eleven, tildelte forskerne et totalt van Hiele nivå til eleven. Gjennom prosjektet identifiserte Burger og Shaughnessy (1986) hvordan de tenker på de ulike nivåene fra van Hieles teori fra nivå 1 til 4. I tillegg fant de ut hva elever evner og ikke evner på de ulike nivåene. Dette presenterte forfatterne i en liste som de kalte nivåindikatorer. Nivåindikatorene til Burger og Shaughnessy er sentrale i analyseverktøyet som brukes i denne oppgaven. Derfor vil jeg nå beskrive dem med eksempler på hvordan geometrisk tenkning kan se ut på hver indikator innenfor hvert nivå fra 1 til 3.

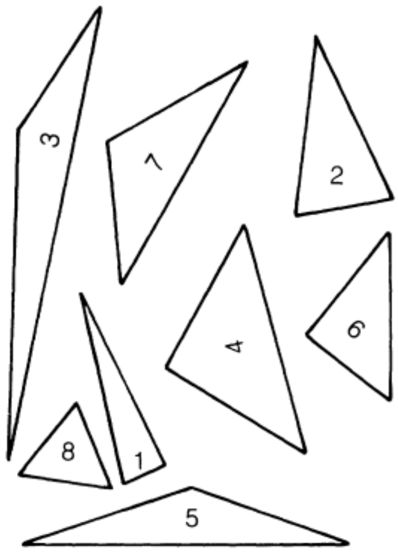
Nivå 1

Elever på nivå 1 vil bruke upresise egenskaper til å sammenligne, beskrive og sortere figurer. I en oppgave hvor elever ble bedt om å tegne en trekant, for så å tegne en ny trekant som var ulik fra den første, så en trekant som var ulik fra de to første og så videre, trekker forfatterne frem et eksempel hvor en elev viste tenking på det første nivået. Eleven beskrev figurene den tegnet på måten «liten vinkel på toppen og bredere vinkel på bunnen» (Burger & Shaugnessy, 1986, s. 41, egen oversettelse). Denne typen tenkning kaller forfatterne å bruke upresise egenskaper. På nivå 1, vil elever også bruke overflødige egenskaper når de sammenligner, identifiserer, beskriver og sorterer figurer. Et eksempel på bruk av overflødige egenskaper i møte med en geometrioppgave er at eleven tar orienteringen til figuren i betraktning. I oppgaven hvor eleven skulle tegne trekanter (se figur 2.1), beskrev eleven de fire første trekantene sine som henholdsvis «rett opp» (1), «opp-ned» (2), «peker den veien (ned)» (3), «peker den veien (til venstre)» (4). Dermed oppfattet eleven orienteringen til figuren som en relevant egenskap.



Figur 2.1. En elev sin tegning av trekanter i en oppgave hvor eleven skulle tegne trekanter som var ulike enn hverandre. (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 38).

Når elever på det første nivået skal definere og beskrive geometriske figurer, refererer de til det forfatterne kaller visuelle prototyper. Visuelle prototyper er tenking av typen «et rektangel ser ut som en dør». I tillegg oppfatter ikke elever på nivå 1 at det finnes et uendelig antall variasjoner av typer figurer. Med type figurer mener de eksempelvis trekanter og firkanter. Et eksempel fra studien er en elev som beskrev at den først trodde det fantes 12 ulike trekanter, for så å endre svaret til mer enn 1000. En viktig årsak til at elever på dette nivået ikke oppfatter et uendelig antall variasjoner av figurer er at de tenker gjennom visualisering. Gjennom sorteringsoppgaven (figur 2.2) hvor elevene skulle sortere trekanter de mente var like på en eller annen måte, fant Burger og Shaughnessy at elever på det første nivået sorterer figurer etter egenskaper som figurene ikke har til felles. Et eksempel er en elev som sorterte trekant 4 og 8 (figur 2.2) sammen og hevdet de hadde tre like sider. Trekant 8 er likesidet, men det er ikke trekant 4. En elev på det første nivået vil altså kunne si at trekanter som trekant 4 er likesidede fordi de ligner på elevens visualisering av en likesidet trekant. De vil ikke ta hensyn til om sidene faktisk er like store eller om en vinkel er større enn en annen en.



Figur 2.2. Oppgave hvor elevene skulle sortere sammen trekanter de mente var like på en eller annen måte. (Burger & Shaughnessy, 1986 s. 35).

Den siste nivåindikatoren på dette nivået er at eleven ikke evner å bestemme en figur ved å bruke nødvendige egenskaper. Det fant de gjennom oppgaven «mysteriefiguren», som var en aktivitet hvor intervjueren ga eleven et og et hint om en figur. Hintene var ulike egenskaper til parallellogram, og illustreres i figur 2.3. Eleven fikk lov til å tegne underveis. Da eleven mente den hadde hørt nok hint, skulle den stoppe intervjueren og avgi svaret. Deretter måtte eleven svare på hvordan hen sikkert kunne vite at mysteriefiguren var akkurat den figuren eleven svarte og om flere hint ville endret meningen deres. Elever som ble tildelt det første nivået på oppgaven behandlet aktiviteten som en gjettelek. De brukte ikke egenskapene som ble gitt konsekvent og behandlet dem ikke som nødvendige egenskaper for å bestemme figuren. Dette gjorde de gjennom å eksempelvis ignorere egenskapene som ikke stemte overens med gjetningene deres. En nivå 1-elev kunne for eksempel gjette firkant etter det første hintet (se figur 2.3), rektangel etter det andre hintet og fortsatt å gjette rektangel etter det femte hintet. Det femte hintet handler om at en vinkel er større enn en annen vinkel. Dette vil ikke en elev på det første nivået forstå, og den vil derfor ignorere hintet.

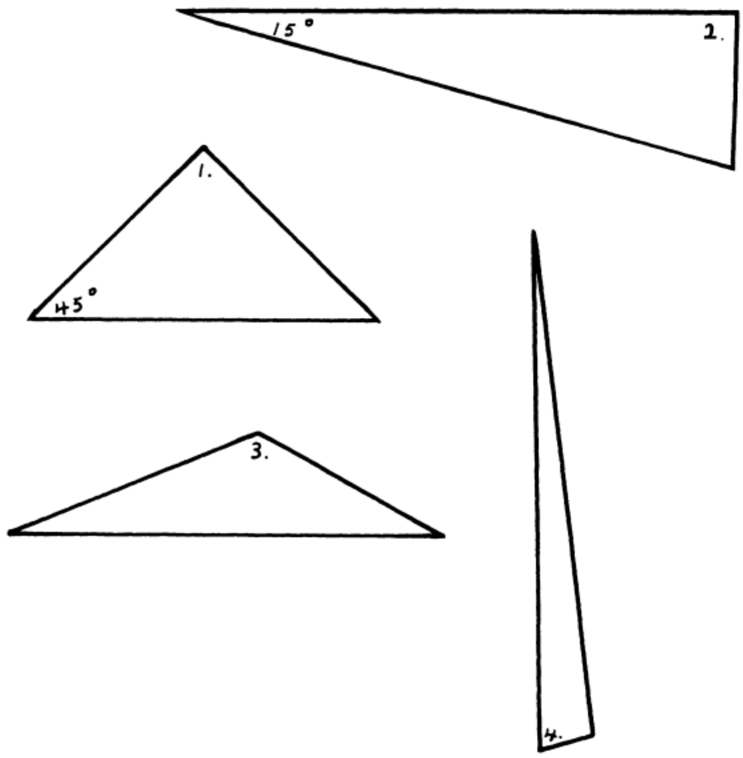
Table 2
Clues for Parallelogram in "What's My Shape?"

1. It is a closed figure with 4 straight sides.
2. It has 2 long sides and 2 short sides.
3. The 2 long sides are the same length.
4. The 2 short sides are the same length.
5. One of the angles is larger than one of the other angles.
6. Two of the angles are the same size.
7. The other two angles are the same size.
8. The 2 long sides are parallel.
9. The 2 short sides are parallel.

Figur 2.3. Hint som ble gitt en etter en av intervjueren, hvor eleven skulle gjette hvilken figur det var snakk om. (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 36)

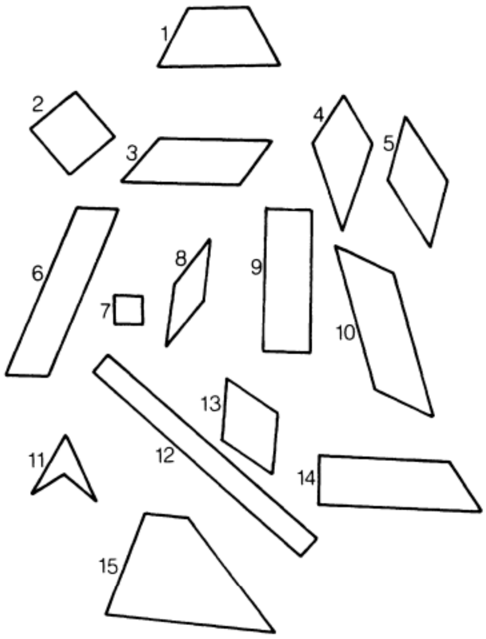
Nivå 2

På nivå 2 kan elevene tydelig sammenligne figurer på bakgrunn av egenskapene til deler av figuren, som vinkelstørrelser og sidelengder. Burger og Shaughnessy trekker frem et eksempel på en elev som tenker på det andre nivået fra oppgaven hvor elevene skulle tegne trekanter som skilte seg fra hverandre. Eleven tegnet trekantene i figur 2.4 og argumenterte for at trekant 1 har en 45-graders vinkel, trekant 2 har en 15-graders vinkel og trekant 3 har en bredere vinkel enn trekant 1 og 2. Til slutt sa eleven av trekant 4 har én 90-graders vinkel og én veldig liten vinkel (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 38). Denne eleven gjorde noe flere elever på nivå 2 gjorde, hvilket var å sortere trekantene etter én egenskap, vinkelstørrelse, mens den ikke nevnte noen andre egenskaper ved trekantene som sidelengder. Forfatterne fant også at elever på det første nivået noen ganger refererer til egenskaper til figurer fremfor å bruke navnet til figuren, selv om eleven kan navnet. For eksempel hevdet en elev at det finnes tre typer trekanter; tre like sider, to like sider og tre ulike sider og at det som skiller dem fra hverandre er størrelse og vinkler. Altså beskriver eleven en likesidet trekant og en likebeint trekant som henholdsvis trekanter med tre like sider og to like sider i stedet for å bruke begrepene *likesidet trekant og likebeint trekant.*



Figur 2.4. En elev på nivå 2 sine tegninger av trekanter som hen mente var ulike. (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 39).

En elev på nivå 2 forstår ikke at en geometrisk figur kan være del av en større klasse av figurer, som at et kvadrat er en del av klassen rektangler. Dette kom frem i oppgaven hvor elevene ble bedt om å identifisere og definere ulike firkanter. Figurene elevene skulle identifisere og definere vises i figur 2.5. Elevene ble bedt om å identifisere alle kvadrater, rektangler, parallellogram og romber. Deretter måtte elevene begrunne svarene sine. En elev hevdet eksempelvis at kvadratene er firkant 2 og 7 og at rektanglene er firkant 9 og 12. Da eleven ble bedt om å definere figurene, ekskluderte den kvadrater fra rektangler ved å si at rektangler har to sider som er lengre enn de andre. Elevens definisjoner viste flere eksempler på at den ikke mente at en figur kan være en del av en større klasse figurer. Et annet eksempel er at eleven mente rektangler og romber ikke kan være parallellogram fordi lengden til de skrå linjene i parallellogrammet er en annen lengde enn de resterende linjene. Funnene fra denne oppgaven viser at elever på det første nivået bruker overflødige kriterier for å identifisere og definere figurer i stedet for å bestemme hvilke egenskaper som er tilstrekkelige. Eksempelvis definerte en elev et rektangel som «en firesidet lukket figur, alle vinklene er 90° og motsatte sider er kongruente» (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 39, egen oversettelse). Det eleven sier er korrekt, men opplysningen om at motsatte sider er kongruente er overflødig informasjon. Et vanlig tekstbokeksempel på en presis definisjon av rektangel er at et rektangel er en firkant der alle vinklene er 90 grader (Kirfel et al., 1999, s, 71). Dette eksempelet, samt flere andre, viste at elever på nivå 2 tydelig avviser tekstboksdefinisjoner om geometriske figurer til fordel for deres egne definisjoner.



Figur 2.5. Firkanter elevene i studien ble bedt om å identifisere og definere. (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 35).

De siste indikatorene på nivå 2 dreier seg om elevenes forståelse av bevis. Når elever som tenker på dette nivået får i oppgave å bevise en påstand, lener de seg på empiriske metoder som eksempelvis tegninger eller observasjoner. Forskerne konkluderte med at disse elevene har en tydelig mangel på forståelse av matematiske bevis.

Nivå 3

Elever på nivå 3 forstår og bruker tekstboksdefinisjoner samt at de tydelig refererer til definisjoner når de tenker. Derfor vil en elev på dette nivået definere et rektangel som en firkant hvor alle vinklene er 90 grader, og forstå at informasjon som at sidene er parallelle eller parvis like lange er overflødig. En elev på det tredje nivået vil også kunne forme komplette definisjoner av typer former, som at «et trapes er en firkant der to av sidene er parallelle» (Kirfel et al., 1999, s. 73). Forståelse for tekstboksdefinisjoner vil føre til at elevene forstår at en figur kan være en del av en større klasse figurer. På nivå 3 evner derfor elever å forme fullstendige definisjoner av klasser figurer. Eksempelvis definerte en elev som tenkte på nivå 3 et kvadrat som «et parallellogram som har alle egenskapene til en rombe og et rektangel» (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 40, egen oversettelse). Dermed forstod eleven at parallellogram, romber og rektangel faller under definisjonen til et kvadrat. Samtidig har eleven justert definisjonen til et kvadrat til å inneholde andre figurer og akseptert definisjonen som likeverdig med tekstboksdefinisjonen hvilket er indikatorer på at eleven tenker på nivå 3. Forskerne fant også at elever på dette nivået kan akseptere og bruke definisjoner av begreper de ikke kan fra før.

På det tredje nivået aksepterer elever logisk delvis ordning innenfor typer figurer. Det betyr at elevene kan sortere typer figurer etter eksempelvis størrelse, form, klasse eller andre egenskaper. Et eksempel fra sorteringsoppgaven (figur 2.2) var en elev som sorterte trekanter etter typer som likebeinte trekanter, trekanter med tre ulike sidelengder og tre ulike vinkler (scalene triangles) og rettvinklede trekanter. Eleven har sortert trekantene i henhold til en variasjon matematisk presise egenskaper, hvilket også er en indikator for tenkning på det tredje nivået.

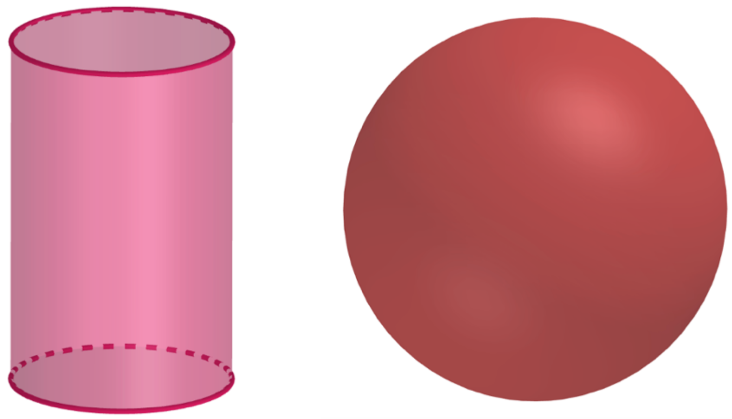
Videre kan elever på nivå 3 bruke logiske «hvis», «så» utsagn hvilket artikkelen til Burger og Shaughnessy ikke eksemplifiserer. Et relevant eksempel kan være at en elev sier «hvis et parallellogram har minst én vinkel som er 90 grader, så er det et rektangel». Slike utsagn av typen hvis p, så q er essensen i et direkte bevis. Derfor kan en elev på dette nivået gjøre enkle direkte bevis på logiske, uformelle måter, hvor de ikke nødvendigvis er bevisst på at det er det de gjør. Samtidig kan elever på dette nivået implisitt forme andre korrekte uformelle deduktive argumenter gjennom å bruke logikk. Et eksempel Burger og Shaugnessy (1986) trekker frem er «hvis p impliserer q og q impliserer r, så impliserer p, r» s. 44. En mulig måte en elev på det tredje nivået kan tenke er «hvis en firkant er et kvadrat, så er den også en rombe. Hvis en firkant er en rombe, så er den et parallellogram. Det betyr at et kvadrat er et parallellogram.». En annen indikator på at en elev tenker på nivå 3, er at de forvirrer aksiomer og teoremer. Aksiomer er de grunnleggende prinsippene i geometri (Hilbert, 1902, s.1). Et aksiom antas å være sant og trenger ikke bevis, mens et teorem må bevises gjennom logikk og bevisføring. Det vil si at elever på dette nivået er usikre på hvilke påstander som trengs å bevises. Elever som ble tildelt nivå 3 i prosjektet til Burger og Shaughnessy (1986), ønsket å utføre deduktive argumenter, men klarte bare å produsere et med konstant hjelp fra intervjueren. Det betyr at elever på nivå 3 ikke selvstendig klarer å utføre formelle deduktive argumenter og bevis.

2.2.2 Tredimensjonale figurer

Gutiérrez, Jaime og Fortuny (1991) formulerte spesifikke beskrivelser av van Hiele nivåene for tredimensjonale figurer fra nivå 1 til nivå 4 (s. 242). Beskrivelsene kan tolkes som nivåindikatorer og inneholder flere av de samme indikatorene som Burger og Shaughnessy (1986) presenterte. For eksempel beskriver Gutiérrez, Jaime og Fortuny (1991) at elever på det tredje nivået evner å logisk klassifisere familier av tredimensjonale figurer, som klasser av prismer, kuler og regulære polyeder (tredimensjonale figurer med regulære polygon som sider). (s. 242). Burger og Shaughnessy (1986) skriver som beskrevet i kapittel 1.2.1 at elever på det tredje nivået kan gjøre det samme innenfor todimensjonale figurer (s. 44). Det som skiller disse nivåindikatorene er at den ene har eksempler fra tredimensjonale figurer, mens den andre har eksempler fra todimensjonale figurer. Dette viser at nivåindikatorer innenfor to- og tredimensjonale figurer kan være overførbare. For å unngå gjentakelse av nivåindikatorene som allerede er beskrevet i kapittel 1.2, vil jeg bare beskrive de nivåindikatorene av Gutiérrez, Jaime og Fortuny (1991) som ikke er nevnt tidligere. På denne måten, vil nivåindikatorene som beskrives i dette kapittelet fungere som en utvidelse av nivåindikatorene til Burger og Shaughnessy (1986).

Nivå 1

Elever på det første nivået kan kjenne igjen og navngi tredimensjonale figurer (Gutiérrez et al, 1991, s. 242). Forfatterne beskriver ikke dette nærmere, men jeg antar at elever ikke vil kjenne igjen og navngi alle variasjoner av tredimensjonale figurer dersom de skiller seg nevneverdig fra hvordan eleven visualiserer dem. Dette forklarer jeg nærmere i kapittel 3.2. Likevel kan man si at elever på det første nivået kan kjenne igjen og navngi mange geometriske figurer som pyramider, kjegler, sylindre og prismer. Elever som tenker på nivå 1 betrakter tredimensjonale figurer som en hel. Dette betyr at de ikke betrakter deler av eller egenskaper til figurer, som flater, kanter og hjørner. Forfatterne understreker dette nærmere ved å forklare at elever på det første nivået ikke eksplisitt tar hensyn til deler av eller egenskaper til tredimensjonale figurer når de skal identifisere og navngi dem. De vil derimot bare identifisere og navngi figurer på bakgrunn av hvordan figuren ser ut som en helhet. Gutiérrez, Jaime og Fortuny (1991) skriver at elever på det første nivået også skiller tredimensjonale figurer fra hverandre på et visuelt grunnlag og at de resonnerer på måten «det ser ut som». La oss bruke figur 2.6 som eksempel.



Figur 2.6. En sylinder og en kule som elever på nivå 1 kan skille fra hverandre på et visuelt grunnlag.

En elev på det første nivået vil kunne skille mellom sylinderen og kulen i figur 2.6 ved å eksempelvis si at «sylinderen ser ut som et rør» og «kulen ser ut som en ball». Dermed vil elevene sammenligne figurene med objekter fra verden som har lignende form, og begrunne at de er ulike på den måten.

Nivå 2

På det andre nivået kan elever identifisere deler av figurer som flater og kanter og de beskriver tredimensjonale figurer på en uformell måte. For eksempel kan elever si at sylinderen i figur 2.6 har tre flater: en i bunnen, en i toppen og en som går rundt. Videre skriver forfatterne at elever som tenker på nivå 2 ikke logisk kan relatere egenskapene til hverandre. Dette kan bety at elever eksempelvis ikke forstår at hvis man øker diameteren i grunnflaten av sylinderen i figur 2.6, men ikke endrer høyden, vil sylinderen endre form. Til slutt skriver Gutiérrez med flere (1991) at elever på det andre nivået kan oppdage egenskaper til figurer gjennom eksperimentering. Det vil si at elever på nivå 2 har forutsetninger til å tilegne seg ny kunnskap om egenskaper til figurer. Derfor kan det være passende for elever på det andre nivået å utforske figurer med konkreter, tegninger eller i dynamiske geometriprogram som GeoGebra.

Nivå 3

Elever på det tredje nivået kan følge noen formelle bevis gitt av lærer eller læreverk, men kan bare gjøre enkle slutninger selv (Gutiérrez et al., 1991). Dette betyr at elever på det tredje nivået kan følge bevis dersom de får støtte, men at de i liten grad kan gjøre bevis selvstendig. Det vil si at instruksjon og oppfølging i bevisføring er viktig for at elever på nivå 3 skal få det til.

2.4 Tidligere forskning

Jeg har gjort få funn av forskningsprosjekter som har analysert innhold i læreverk med utgangspunkt i van Hiele-teorien. Det finnes derimot en anerkjent studie som har blitt gjort på feltet hvilket er Fuys, Geddes og Tischler (1988). Fordi det finnes lite forskning på området, vil den nevnte studien spille en stor rolle i diskusjonsdelen av oppgaven. Under vil jeg presentere studien og hvilke resultater den ga.

2.4.1 van Hiele-nivåer i læreverk

Fuys, Geddes og Tischler (1988) gjennomførte et prosjekt i USA hvor de analyserte innhold relatert til geometri i analoge læreverk i lys av van Hiele-teorien. Totalt ble tre læreverk analysert og disse var publiserte på begynnelsen av 80-tallet. Delene av læreverkene som ble analysert var en lærebok på hvert klassetrinn i hvert læreverk samt tilhørende lærerveiledning på hvert trinn i alle læreverkene. Lærebøker og lærerveiledninger for hvert klassetrinn fra 1. trinn til og med 8. trinn ble analysert[1]. Hensikten med studien var blant annet å finne ut hvilke nivåer fra van Hieles teori læreverkene viser på hvert klassetrinn. Innholdet som ble analysert og tildelt van Hiele-nivåer var blant annet forklaringer av teori og oppgaver. Dette ville forfatterne bruke videre til å undersøke hvilken sammenheng det var mellom klassetrinn og van Hiele-nivå på innholdet i læreverkene.

[1] Forfatterne refererer til K-8 når de skriver hvilke klassetrinn læreverkene de analyserer er ment for. K-8-skoler har elever fra førskolen (5/6 år) til og med 8. trinn (13/14 år). Jeg velger å skrive 1.-8. klasse i stedet for K-8 fordi det vil være omtrentlig det samme oversatt til norsk kontekst..

For å kunne finne svar på forskningsspørsmålene, måtte forfatterne tildele van Hiele-nivåer til innholdet de analyserte (Fuys et al., 1988). Når de analyserte forklaringer i læreverkene, tildelte de van Hiele-nivå etter hvilket nivå en elev må tenke på for å forstå hele forklaringen. Dersom en forklaring er tildelt nivå 2, betyr det at elever på det andre nivået vil forstå hele forklaringen. Fordi van Hiele-nivåene er hierarkiske, betyr dette også at elever som tenker på nivåer høyere enn 2 også vil forstå forklaringen. I analysen av oppgaver valgte de å sette det laveste nivået av geometrisk tenkning som krevdes for at en elev kunne svare riktig på oppgavene på hver side. Dermed vil elever på nivåer høyere enn det tildelte nivået også kunne svare riktig på oppgavene. Fordi jeg analyserer geometriinnhold i deler av et læreverk ment for ungdomstrinnet i min studie, vil jeg kun beskrive hva Fuys, Geddes og Tischler (1988) fant i lærebøker og lærerveiledninger på 7. og 8. trinn. Funn i deler av læreverk på de lavere trinnene vil jeg vise i figurer, men altså ikke beskrive nærmere.

	Læreverk A			**Læreverk B**			**Læreverk C**		
Klassetrinn	Nivå 1	Nivå 2	Nivå 3	Nivå 1	Nivå 2	Nivå 3	Nivå 1	Nivå 2	Nivå 3
Førskole	100	0	0	100	0	0	100	0	0
1	100	0	0	100	0	0	100	0	0
2	100	0	0	100	0	0	100	0	0
3	95	5	0	88	12	0	92	8	0
4	96	4	0	71	29	0	75	25	0
5	71	29	0	65	35	0	85	15	0
6	80	20	0	55	45	0	60	40	0
7	58	37	5	67	33	0	43	57	0
8	66	20	14	29	68	3	19	63	18

Figur 2.7. Prosentandel av forklaringer i læreverkene som krever nivå 1, 2 og 3 for å forstås (Fuys et al., 1988, s. 167).

Funnene av hvilke nivå som kreves for å forstå forklaringer i læreverkene vises i figur 2.7 Forfatterne fant at alle forklaringer kan forstås av elever på det tredje nivået. I gjennomsnitt krevde 56% av forklaringene på 7. trinn av elevene tenkte på nivå 1 for å forstå dem og 42% krevde tenking på det andre nivået. Læreverk C krevde i mer tenkning på det andre nivået enn de to andre læreverkene. På 8. trinn krevde i gjennomsnitt 38% av forklaringene nivå 1, 50% nivå 2 og 12% nivå 3 for å forstå forklaringene. Læreverk B og C krevde mer tenkning på det andre nivået enn læreverk A som krevde mest tenkning på det første nivået for å forstå forklaringer. Læreverk A og C krevde mest tenkning på det tredje nivået, men det tredje nivået var generelt lite identifisert i forklaringene.

Med andre ord fant de at læreverkene hadde litt ulik fordeling av hvilke nivå i van Hiele-teorien som krevdes for å forstå forklaringer på de ulike trinnene. Samtidig er mønsteret ganske likt i alle læreverkene; det kreves noe nivå 2 tenkning fra tredje klasse og oppover samt at det kreves noe nivå 3 tenkning i 7. og 8. klasse-delene av læreverkene.

	Læreverk A			**Læreverk B**			**Læreverk C**		
Klassetrinn	Gj.	O.gj.	75%	Gj.	O.gj.	75%	Gj.	O.gj.	75%
Førskole	100	100		100	100		100	100	
1	100	100		100	100		100	100	
2	100	100		100	100		100	100	
3	95	95	100	100	100		100	100	
4	100	100		100	86		80	70	95
5	94	94	100	88	88	94	96	96	96
6	80	66	83	100	95		100	96	
7	92	92	97	100	93		78	52	83
8	89	89	91	100	93		78	59	81

Figur 2.8. Prosentandel av sider med oppgaver på som kan løses med tenkning på nivå 1 eller sider med oppgaver som ikke kunne tildeles nivå (Fuys et al., 1988, s. 168).

Tabellen i figur 2.8 viser prosentandeler av sider i læreverkene med oppgaver som kan løses med geometrisk tenkning på nivå 1 eller sider med oppgaver som ikke kunne tildeles et nivå. Det er tre kolonner under hvert læreverk. Den første kolonnen (Gj.) viser prosentandelen av sider med oppgaver ment for gjennomsnittlige elever som kan løses på det første nivået eller som ikke kunne tildeles nivå. Den andre kolonnen (O.gj.) viser tilsvarende prosentandel, men for sider hvor oppgavene er ment for elever som presterer over gjennomsnittet i matematikk. Den tredje kolonnen (75%) viser prosentandel av sider hvor minst 75% av oppgavene ment for gjennomsnittlige elever kan løses med det laveste nivået av tenkning.

Av tabellen kan man se at elever som tenker på det laveste nivået kan mestre geometri i møte med oppgavene som er ment for gjennomsnittlige elever. I læreverk A og B kan elever som tenker på nivå 1 også stort sett mestre oppgaver ment for elever som presterer over gjennomsnittet i matematikk. Læreverk C inneholdt flere oppgaver som krevde høyere nivå av geometrisk tenkning enn de to andre læreverkene. Samtidig kunne de fleste oppgavene i læreverk C løses av elever som tenker på det første nivået.

I forhold til om det var sprang mellom van Hiele-nivåer på et klassetrinn eller mellom klassetrinn, fant Fuys, Geddes og Tischler (1988) blant annet at forklaringene ofte krevde høyere nivå enn oppgavene. Dette fører til at elever stort sett kan klare å løse oppgavene uten å ta forklaringene i betraktning. At elever kan komme seg gjennom 8. trinn ved å tenke på det første nivået kan føre til utfordringer senere i skolegangen. Dersom geometrien elevene møter på 9. og 10. trinn krever tenkning på nivå 2, vil elevene kunne oppleve det som vanskelig.

3.0 Metode

Hensikten med dette kapitlet er å forklare hvordan jeg har gått frem for å finne svar på problemstillingen i oppgaven: *Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for å forstå forklaringer og løse oppgaver innenfor egenskaper til geometriske figurer i Campus Matte 9, og hvilken sammenheng finnes mellom vanskelighetsgrad på oppgavene og nivåene som kreves for å løse dem?*

Som beskrevet innledningsvis skal problemstillingen besvares ved hjelp av følgende forskningsspørsmål:

I. Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for å forstå forklaringer i videoene i forelesningene?
II. Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for svare riktig på kontrollspørsmålene i forelesningene?
III. Hvilke nivåer kreves for å løse oppgavene i oppgavesamlingene?
IV. Hvilken sammenheng finnes mellom vanskelighetsgrad på oppgavene i Campus Matte 9 og nivå av geometrisk tenkning som kreves for å løse dem?

Først beskrives forskningsdesignet og forskningsmetoden som er brukt i studien. Deretter presenteres og forklares analyseverktøyet som brukes til å analysere datamaterialet. Videre forklares hvordan analyseverktøyet blir anvendt i analysen. Etter det presenteres datamaterialet med skjermbilder for å illustrere. Deretter vurderes kvaliteten i studien gjennom begrepene validitet og reliabilitet. Til slutt kommenterer jeg hvilke etiske hensyn jeg har tatt i prosjektet.

3.1 Forskningsdesign og forskningsmetode

Forskningsdesign er ifølge Befring (2020) metodiske grunntrekk ved et forskningsprosjekt. De metodiske grunntrekkene i min studie er basert på forskningsdesignet *case-studie*. Befring (2020) skriver at case-design ofte betegnes som *single case design* og case-studie. Jeg kommer til å bruke betegnelsen case-design videre i oppgaven. Ifølge Bryman (2016) innebærer case-design en detaljert og intensiv analyse av en enkelt «case». En «case» er vanligvis én eller få forskningsobjekter som personer, samfunn eller organisasjoner (Befring, 2020; Bryman, 2016). I min studie analyseres én case eller et forskningsobjekt, hvilket er læreverket Campus Matte 9. I en case-studie er casen et objekt av interesse i seg selv og forskeren ønsker å undersøke casen i dybden (Bryman, 2016). Kunnskap om spesielle egenskaper eller fenomener ved casen står ofte i fokus i analysen i en case-studie (Befring, 2020). Forskningsdesignet passer til å undersøke problemstillingen i denne studien fordi jeg må undersøke Campus Matte i dybden for å kunne finne svar på forskningsspørsmålene og dermed problemstillingen.

Bryman (2016) skiller mellom to ulike forskningsstrategier: kvantitativ og kvalitativ forskning. I kvantitativ forskning samles talldata inn og det er et deduktivt forhold mellom teori og forskning (Bryman, 2016). Det sistnevnte betyr at man tar utgangspunkt i og tester allerede eksisterende teori. Til forskjell fra kvantitativ forskning, består datamaterialet i kvalitativ forskning hovedsakelig av ord. I tillegg hevder Bryman (2016) at kvalitativ forskning ofte innebærer et induktivt syn på forholdet mellom teori og forskning. Det vil si at ny teori skapes ut fra forskningen som blir gjort. For å finne svar på forskningsspørsmålene i mitt prosjekt, trenger jeg å finne ut hvor mange av forklaringene i videoene på Campus Matte 9 elever kan forstå på hvert nivå av geometrisk tenkning. I tillegg trenger jeg å finne ut hvor mange av kontrollspørsmålene og oppgavene i læreverket som kan løses av elever på hvert nivå. Formålet med studien er ikke å skape ny teori. I stedet bruker jeg eksisterende teori til å utvikle et analyseverktøy som gjør det mulig å analysere dataene. På bakgrunn av dette, mener jeg det er naturlig å benytte kvantitativ forskningsstrategi i min studie.

Som nevnt innledningsvis, skal jeg finne svar på forskningsspørsmålene og problemstillingen i oppgaven gjennom analyse av innhold på Campus Matte 9. Analysemetoden som brukes for å finne svar på forskningsspørsmålene og problemstillingen er innholdsanalyse. Innholdsanalyse er en tilnærming til analyse av dokumenter som har som mål å kvantifisere innhold i forhold til forutbestemte kategorier (Bryman, 2016). I analysen blir derfor datamaterialet fra læreverket betraktet som et dokument. Kategoriene bestemmes av teorien beskrevet i kapittel 2. Analysestrategien forklares i kapittel 3.3.

3.2 Analyseverktøy

Nivåene i van Hiele-teorien er laget for å beskrive elevers nivå av geometrisk tenkning. Vanligvis blir teorien brukt til å tildele nivåer til elever gjennom å analysere elevenes tenkning i arbeid med åpne geometrioppgaver. Derfor er det nødvendig å operasjonalisere teorien for å kunne bruke den til å analysere læreverksforklaringer og spesielt oppgaver.

Derfor har jeg formet operasjonelle definisjoner på nivåindikatorer på van Hieles nivåer fra nivå 1 til 3. Disse nivåindikatorene vil utgjøre analyseredskapet jeg vil bruke for å svare på problemstillingen. Nivåindikatorene tar utgangspunkt i Burger og Shaughnessy (1986) og Gutiérrez, Jaime og Fortuny (1991) som presentert i kapittel 2.2. Burger og Shaughnessys (1986) nivåindikatorer er laget på bakgrunn av deres studie og refererer i noen tilfeller til spesifikke situasjoner. Derfor trenger jeg å gjøre noen av dem mer generelle for at de skal kunne brukes i min studie. Gutiérrez, Jaime og Fortunys (1991) nivåindikatorer er generelle, men tilpasset tredimensjonale figurer. Som beskrevet i kapittel 2.2. er deres nivåindikatorer overførbare til todimensjonale figurer og motsatt. For å kunne bruke analyseverktøyet til å analysere forelesninger og oppgaver innenfor både egenskaper to- og tredimensjonale figurer vil jeg bruke elementer fra begge artiklene.

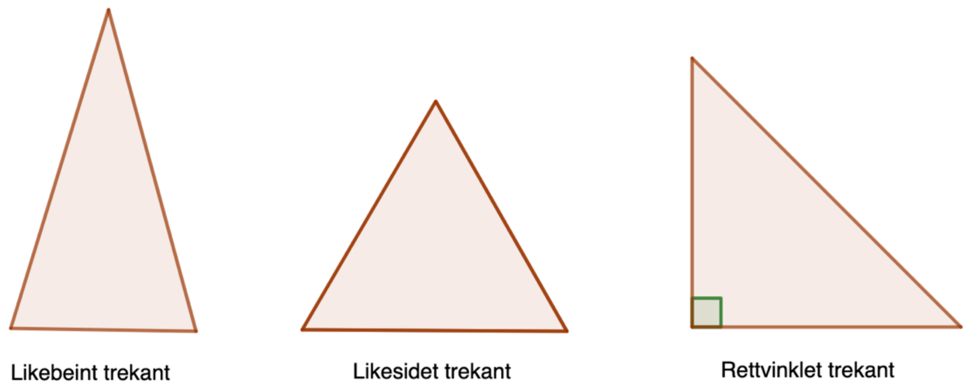
Jeg vil nå presentere nivåindikatorene som er analyseverktøyet i min studie. Under hver nivåindikator beskriver jeg bakgrunnen til nivåindikatoren og gir eksempel.

Nivå 1 av geometrisk tenkning

En elev på nivå 1

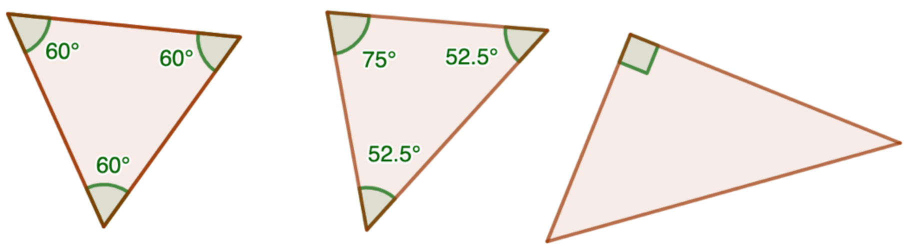
1.1 Kan kjenne igjen og navngi figurer dersom figurene samsvarer med prototyper av figurer samt bedømmer, beskriver og skiller mellom figurer på et visuelt grunnlag og bruker argumentasjon av typen «det ser ut som ...».

Første del av nivåindikatoren er generalisert til å gjelde alle geometriske figurer og er oversatt fra Gutiérrez et al. (1991) som skriver «they recognize and name solids (prisms, cones, pyramids, etc.)» (s. 242). Det betyr at når en elev på det første nivået ser en figur, for eksempel en sylinder, vil de kunne kjenne igjen og navngi den. Elever på det første nivået vil likevel bare klare å kjenne igjen og navngi figurer dersom de ligner på deres visualisering av figuren. I analysen vil jeg ta utgangspunkt i at elever på nivå 1 kan kjenne igjen prototyper av figurer, det vil si de vanligste måtene å fremstille figurene på. Fordi elevers visualisering av figurer kan variere, går det ikke an å si med sikkerhet at det finnes én prototype som alle elever visualiserer av hver figurtype. Likevel velger jeg å presentere prototyper som jeg vil ta utgangspunkt i at elever på det første nivået vil kjenne igjen i analysen. Prototyper elever på nivå 1 kjenner igjen og kan navngi samt figurer de ikke med sikkerhet vil kjenne igjen og navngi er illustrert i figurene under.



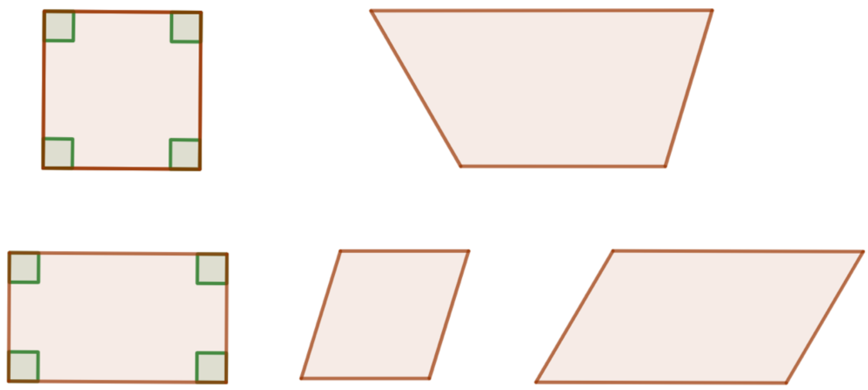
Figur 3.1. Prototyper av trekanter elever på nivå 1 kan kjenne igjen og navngi.

Elever på det første nivået vil kjenne igjen trekantene i figur 3.1 fordi de ligner på de vanligste fremstillingene av de ulike typene av trekanter. Dette er fordi grunnlinjen er parallell med bunnen av skjermen. Samtidig er de to like lange sidene i den likebeinte trekanten betraktelig lengre enn grunnlinjen, som gjør at den visuelt skiller seg fra en likebeint trekant. Det samme hadde gjaldt dersom de to like lange sidene hadde vært betraktelig kortere enn den siste siden. Den rettvinklede trekanten har to sidelengder som kan se like lange ut (sidene som møtes i den rette vinkelen). Likevel vil ikke elever på det første nivået kjenne den igjen som en likebeint trekant fordi den ligner mer på en rettvinklet trekant.



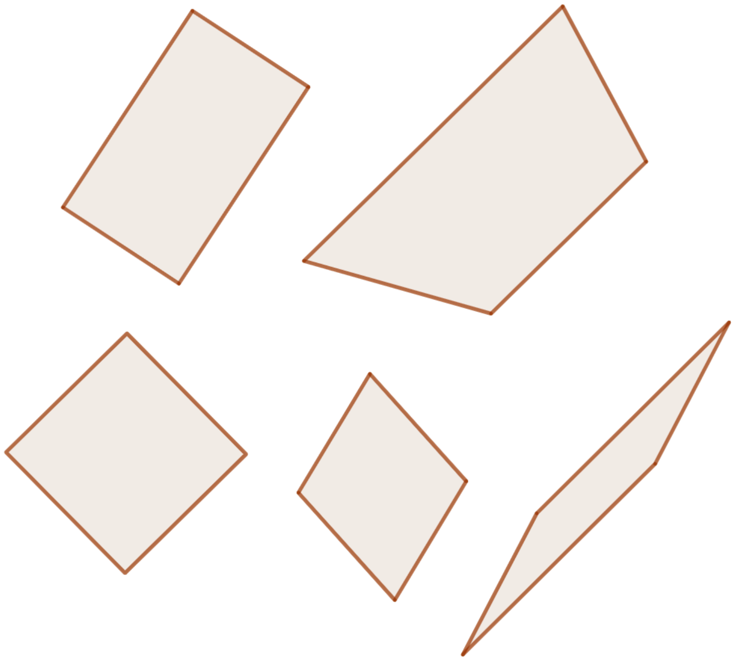
Figur 3.2. Trekanter elever på nivå 1 ikke med sikkerhet kan kjenne igjen og navngi.

Elever på det første nivået vil ikke med sikkerhet kjenne igjen trekantene i figur 3.2 fordi de er orientert på en måte som skiller seg fra prototypen (se nivåindikator 1.4). I tillegg vil disse trekantene kunne se ganske like ut for en elev på nivå 1 som ikke vil ta deler eller egenskaper til figurer i betraktning, som størrelsen på vinklene (se nivåindikator 1.5). For dem kan sidene i trekantene se like lange ut.



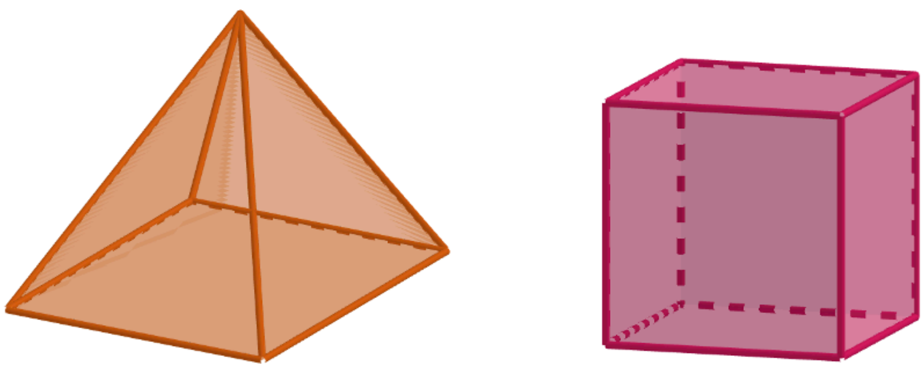
Figur 3.3. Prototyper av typer firkanter elever på nivå 1 kan kjenne igjen og navngi.

Firkantene i figur 3.3 viser vanlige fremstillinger av ulike typer firkanter. Elever på det første nivået vil kunne kjenne igjen firkanter hvis de parallelle sidene i firkanten er parallelle med bunnen på arket/boken/skjermen. Det vil si at dersom firkantene i figur 3.3 hadde vært rotert med 45 grader, ville ikke elever på nivå 1 med sikkerhet kjent dem igjen. Samtidig kan lengdene på sidene i firkantene ha noe å si for om elever på det første nivået kan kjenne dem igjen. For eksempel dersom det hadde vært mindre differanse i lengden mellom de parvis like lange sidene i rektanglet, kunne elever på nivå 1 kalt det et kvadrat.



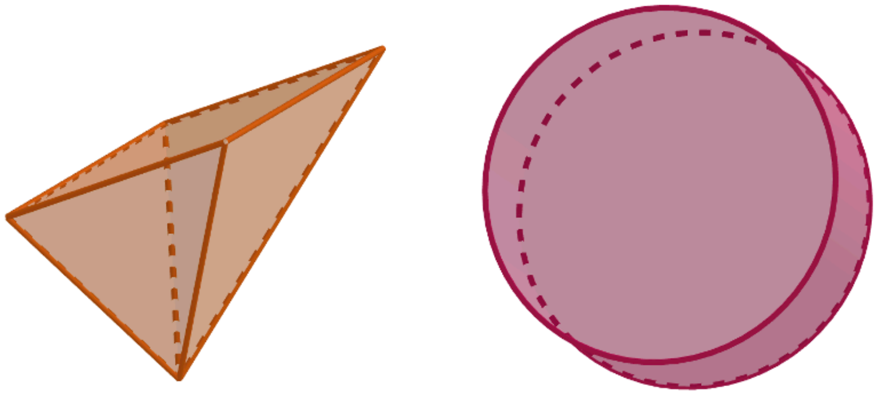
Figur 3.4. Firkanter elever på nivå 1 ikke med sikkerhet kan kjenne igjen og navngi.

Firkantene i figur 3.4 vil ikke elever på det første nivået kjenne igjen med sikkerhet fordi de parallelle linjene i firkantene ikke er parallell med bunnen på skjermen. Som nevnt over kan disse elevene heller ikke med sikkerhet klare å skille mellom eksempelvis kvadrater og rektangler dersom rektanglet har sidelengder som kan se like lange ut (selv om det ikke er tilfellet).



Figur 3.5. Prototyper av tredimensjonale figurer elever på nivå 1 kan kjenne igjen og navngi.

Elever på det første nivået kan kjenne igjen tredimensjonale figurer dersom grunnflaten er tilnærmet parallell med bunnen av arket/boken/skjermen, slik som eksemplene i figur 3.5 viser. Tredimensjonale figurer som skiller seg betraktelig fra prototypene i figuren over, vil ikke elever på nivå 1 med sikkerhet kjenne igjen. Samtidig kan høyde og sidelengder påvirke elevens evne til å kjenne igjen tredimensjonale figurer. Dersom en tredimensjonal figur skiller seg betraktelig fra vanlig framstilling av figurtypen, kan man ta utgangspunkt i at elever på det første nivået ikke vil kunne kjenne igjen eller navngi figuren.



Figur 3.6. Tredimensjonale figurer elever på nivå 1 ikke med sikkerhet kan kjenne igjen og navngi.

De tredimensjonale figurene illustrert i figur 3.6 kan ikke elever på det første nivået med sikkerhet kjenne igjen fordi de er orientert på en måte som elevene ikke vil kjenne igjen. Elever på nivå 1 vil ikke kjenne igjen pyramiden fordi toppen «peker nedover» og derfor er grunnflaten ikke tilnærmet parallell med bunnen på skjermen. Sylinderen i figuren har både en grunnflate som ikke er parallell med bunnen på skjermen, samt at høyden ikke er lang i forhold til størrelsen på grunnflaten. Derfor vil sylinderen kunne skille seg betraktelig fra elevens visualisering av sylindre.

Resten av nivåindikator 1.1 er satt sammen av tre setninger fra nivåindikatorene til Gutiérrez, Jaime og Fortuny (1991) og en nivåindikator fra Burger og Shaughnessy (1986). Gutiérres et al. (1991) skriver under det første nivået på van Hiele-teorien at «solids are judged by their appearance.» (Gutiérrez et al., 1991, s.

242). Jeg mener nivåindikatoren er overførbar til todimensjonale figurer og velger derfor å oversette nivåindikatoren til «figurer blir bedømt etter hvordan de ser ut». Videre skriver de om elever på det første nivået at «they use reasoning of the type "it looks like ..."» (Gutiérrez et al., 1991, s. 242). Sitatet viser vanlig tenkning blant elever på det første nivået som henger sammen med at figurer bedømmes på bakgrunn av hvordan de ser ut. Derfor velger jeg å inkludere det i samme nivåindikator. Forfatterne skriver også at elever på nivå 1 skiller tredimensjonale figurer fra hverandre på et visuelt grunnlag: «they distinguish a given solid from others on a visual basis.» (Gutiérrez et al., 1991, s. 242). Denne mener jeg også er overførbar til todimensjonale figurer. Derfor oversetter jeg den til «de skiller en figur fra en annen på et visuelt grunnlag.

Burger og Shaughnessy (1986) beskriver en lignende nivåindikator: «References to visual prototypes to characterize shapes» (s. 43). I dette sitatet refererer de til at elever på det første nivået bruker tenkning som «et rektangel ser ut som en dør» når de skal beskrive figurer. Jeg velger derfor å oversette «characterize» til «beskrive»[2]. Å referere til visuelle prototyper tilsvarer å tenke på måten «det ser ut som ...» som er beskrevet i nivåindikatorene til Gutiérrez et al. (1991). Jeg velger å bruke Gutiérrez et al. (1991) sin formulering av type tenkning fordi den er mer konkret.

1.2 sorterer figurer etter egenskaper figurene ikke har til felles.

Nivåindikatoren er formulert med utgangspunkt i følgende sitat: «Inconsistent sortings; that is, sortings by properties not shared by the sorted shapes.» (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 44). Jeg vil forklare hva forfatterne mener med et eksempel. Elever på det første nivået vil kunne sortere et ikke-kvadratisk rektangel (figur 3.7) hvor de to lengste sidelengdene ikke er betraktelig lengre enn de korteste som et kvadrat fordi det «ser sånn ut». Dette kan komme av at elevenes visuelle bilde av et rektangel kan være at to av sidelengdene er tydelig lengre enn de to andre. Derfor vil et rektangel som i figur 3.7 kunne sorteres som

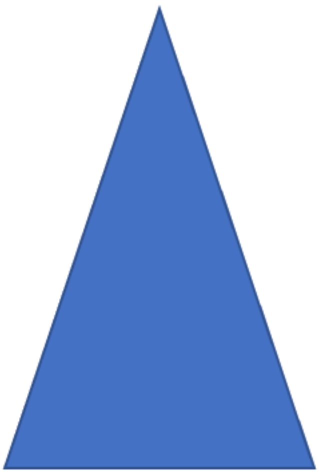
[2] Å karakterisere og å beskrive har ulik betydning, men i denne konteksten mener jeg «beskrive» vil ha samme betydning.

et kvadrat av elever på det første nivået. Gutiérrez et al (1991) har ingen nivåindikatorer som ligner på denne.

Figur 3.7. Ikke-kvadratisk rektangel elever på nivå 1 kan sortere som kvadrat.

1.3 bruker upresise egenskaper til å sammenligne, identifisere, beskrive og sortere figurer.

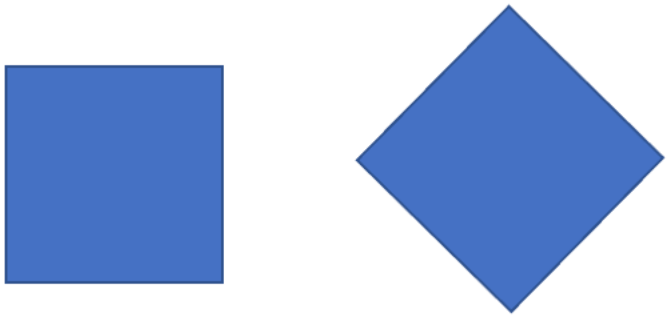
Nivåindikatoren er omformulert fra følgende nivåindikator fra Burger og Shaughnessy (1986): «Use of imprecise properties (qualities) to compare drawings and to identify, characterize, and sort shapes.» (s. 43). Med dette mener forfatterne at elever på det første nivået identifiserer, beskriver og sorterer figurer på bakgrunn av visuelle egenskaper ved figuren og at det derfor kan bli upresist. For eksempel kan en elev på det første nivået beskrive vinklene i en likebeint trekant (figur 3.8) slik: «liten vinkel på toppen og bredere vinkler på bunnen». Gutiérrez et al (1991) har ingen nivåindikatorer som nevner bruk av upresise egenskaper.



Figur 3.8. Likebeint trekant en elev på det første nivået kan beskrive med upresise egenskaper.

1.4 bruker figurens orientering når den identifiserer, navngir og beskriver figurer.

En av Burger og Shaughnessys (1986) nivåindikatorer er «Inclusion of irrelevant attributes when identifying and describing shapes, such as orientation of the figure on the page» (s. 43). Jeg velger å oversette «irrelevant attributes» til irrelevante egenskaper. Forfatterne gir ingen andre eksempler på hva bruk av irrelevante egenskaper kan være på det første nivået annet enn orientering av figuren. Gutiérrez et al (1991) skriver også at elever på det første nivået bruker irrelevante egenskaper for å identifisere eller navngi figurer uten å forklare det videre: «The students do not explicitly consider the components or properties in order to identify or to name a solid; on the contrary, they use reasoning of the type "it looks like ..." or irrelevant attributes.» (s. 242). Å «bruke irrelevante egenskaper» på nivå 1 betyr ifølge Burger og Shaughnessy (1986) at eleven bruker orienteringen til en figur når den identifiserer, navngir og beskriver figurer. Derfor vil jeg bruke denne formuleringen i stedet for «bruker irrelevante egenskaper». Et eksempel på denne nivåindikatoren er at elever på nivå 1 ikke vil kalle kvadratet til høyre i figur 3.9 et kvadrat, men heller eksempelvis en diamant. Det vil eleven kunne gjøre fordi orienteringen til figuren gjør at den ikke samsvarer med det eleven ser for seg når den tenker på et kvadrat. Kvadratet til venstre i figur 3.9 er orientert slik at elever på nivå 1 vil kunne kjenne den igjen. Denne nivåindikatoren har derfor en sterk sammenheng med nivåindikator 1.1, som blant annet handler om at elever kan kjenne igjen og navngi en figur dersom figuren samsvarer med prototypen av figuren.



Figur 3.9. Kvadrater med ulik orientering, hvor elever på nivå 1 vil kjenne igjen og navngi kvadratet til venstre, men ikke det til høyre.

1.5 betrakter figurer som en helhet og tar ikke hensyn til deler av eller egenskaper til en figur når de skal identifisere og navngi figurer og forstår ikke at egenskaper er nødvendige betingelser for at en figur skal tilhøre en bestemt type figur.

Gutiérrez et al. (1991) skriver følgende om elever på nivå 1: «the students consider three-dimensional objects as a whole.» (s. 242). Jeg velger å oversette dette til at elever på det første nivået betrakter tredimensjonale objekter som en helhet. Dette impliserer at elever på det første nivået ikke tar deler eller egenskaper til figurer i betraktning, hvilket Gutiérrez et al. (1991) også skriver: «The students do not explicitly consider the components or properties in order to identify or to name a solid» (s. 242). Derfor vil jeg vurdere det slik at oppgaver eller forelesningsvideoer som krever at elever tar egenskaper eller deler av en figur eksplisitt i betraktning ikke passer for elever på det første nivået.

En av Burger og Shaughnessys (1986) nivåindikatorer er: «Inability to use properties as necessary conditions to determine a shape; for example, guessing the shape in the mystery shape task after far too few clues, as if the clues triggered a visual image.» (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 44). Dette tolker jeg som at elever på nivå 1 ikke evner å bruke egenskaper som nødvendige og tilstrekkelige betingelser for å bestemme en figur. Dette henger i stor grad sammen med at elever på det første nivået ikke eksplisitt tar delene eller egenskaper til figurer i betraktning (Gutiérrez et al., 1991, s. 242).

1.6 oppfatter ikke at det finnes uendelig mange varianter av typer figurer.

Nivåindikatoren er en omformulering av Burger og Shaughnessys (1986) nivåindikator «Inability to conceive of an infinite variety of types of shapes.» (s.44). Med dette menes det at elever på det første nivået ikke kan oppfatte uendelig mange varianter av typer figurer. Med typer figurer mener de eksempelvis at likebeinte trekanter, kvadrater og prismer.

Nivå 2 av geometrisk tenkning

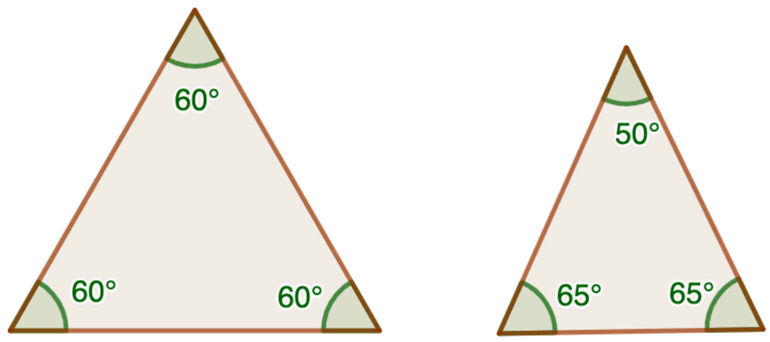
En elev på nivå 2

2.1 identifiserer deler av figurer og forstår at figurer bærer sine egenskaper.

Gutiérrez, Jaime og Fortuny (1991) skriver om elever på det andre nivået: «The students identify the components of solids (faces, edges, etc.), and the solids are bearers of their properties (parallelism, regularity, etc.)» (s. 242). Med dette mener de at elevene klarer å identifisere deler av geometriske figurer som flater og kanter i tredimensjonale figurer. Overført til todimensjonale figurer kan elever identifisere eksempelvis vinkler og sidelengder. I sitatet beskrives også at figurer bærer sine egenskaper på nivå 2. Dette tolker jeg som at elevene forstår at uansett hvordan en figur blir transformert (rotert, forstørret, forminsket og/eller speilet) vil egenskapene forbli de samme. For eksempel vil en elev på nivå 2 kjenne igjen kvadratet til høyre i figur 3.9, i motsetning til elever på det første nivået.

2.2 bruke egenskaper til deler av figurer i oppgavesituasjoner.

Nivåindikatoren har sitt utgangspunkt i «Comparing shapes explicitly by means of properties of their components.» (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 44). Jeg vil forklare nivåindikatoren med et eksempel. Dersom en elev skal sammenligne de to trekantene i figur 3.10, vil hen kunne sammenligne dem på bakgrunn av vinkelstørrelsene. Eleven kan da kunne si at alle vinklene i trekanten til venstre er like, mens trekanten til høyre har to vinkler som er like store og en vinkel som er mindre enn de andre.

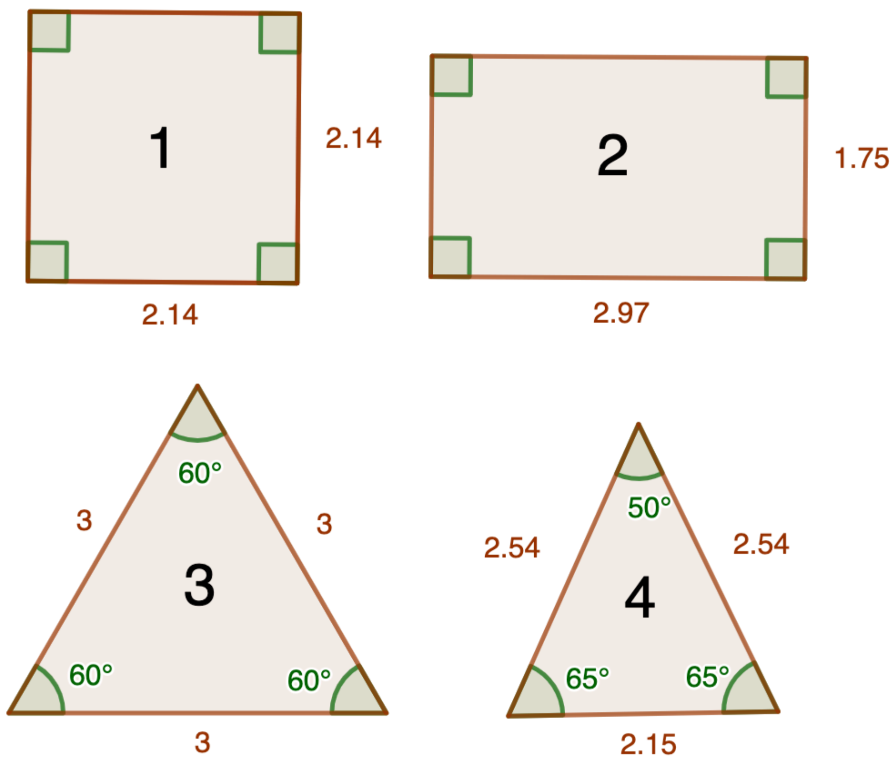


Figur 3.10: Likesidet trekant (venstre) og likebeint trekant (høyre).

Burger og Shaughnessy (1986) skriver at elever på det andre nivået eksplisitt bruker egenskaper til deler av figurer i situasjoner hvor de skal sammenligne figurer. Jeg mener at dersom elever kan bruke egenskaper til deler av figurer når de sammenligner figurer, så kan de også klare det i andre situasjoner.
Derfor generaliserer jeg nivåindikatoren til at elever på nivå 2 kan bruke egenskaper til deler av figurer i oppgavesituasjoner.

2.3 sorterer figurer etter én egenskap, mens den overser andre egenskaper.

Burger og Shaughnessy (1986) skriver under nivå 2 at elever gjør følgende: «Sorting by single attributes, such as properties of sides, while neglecting angles, symmetry, and so forth» (s.44). Jeg vil forklare min forståelse av sitatet med et eksempel. Eksempelet tar utgangspunkt i at en elev på det andre nivået skal sortere de todimensjonale figurene i figur 3.11.



Figur 3.11. Ulike todimensjonale figurer med vinkelstørrelse og sidelengder. Sifferet «inni» figurene er nummerering av figuren.

En elev på det andre nivået vil kunne sortere figur 1 og 3 sammen og si at alle sidene i figurene er like lange. Gjennom samme tenkemåte vil den kunne sortere figur 2 og 4 sammen og begrunne det med at ikke alle sidene i figurene er like lange. Eleven i eksempelet har sortert figurene på bakgrunn av sidelengdene, mens den ikke har tatt vinklene i betraktning.

2.4 kan ikke logisk relatere egenskaper til hverandre.

Gutiérrez et al. (1991) skriver om elever på det andre nivået at «They are not able to logically relate the properties to each other» (s. 242). Forfatterne forklarer ikke hva de mener med dette og gir ingen eksempler. Derfor velger jeg å forklare sitatet etter min forståelse. Å logisk relatere egenskaper til hverandre handler etter min tolkning om å forstå at egenskapene i en figur har en sammenheng. For eksempel hvis vinklene i en firkant er 90 grader, må sidene være parallelle. Elever på det andre nivået har med andre ord en begrenset forståelse for sammenhengen mellom egenskapene til geometriske figurer.

2.5 beskriver figurer etter egenskaper på en uformell måte.

Burger og Shaughnessy (1986) sin femte nivåindikator er «Descriptions of types of shapes by explicit use of their properties, rather than by type names, even if known. For example, instead of rectangle, the shape would be referred to as a four-sided figure with all right angles» (s. 44). I min studie vil det ikke være mulig å undersøke om elever refererer til en figur gjennom egenskaper eller med typenavn. Derfor velger jeg å ikke inkludere at elever kan referere til figurer ved bruk av beskrivelse av egenskaper eller om de navngis i mine nivåindikatorer. At elever på det andre nivået kan beskrive figurer ved eksplisitt bruk av egenskaper, derimot er relevant. Gutiérrez et al. (1991) formulerer en nivåindikator som ligner på Burger og Shaughnessys: «They describe in an informal way three-dimensional shapes by means of their properties.» (s.242). Jeg foretrekker denne nivåindikatoren fremfor Burger og Shaughnessy sin fordi den sier noe om hvordan elever på det andre nivået beskriver figurer: uformelt. Dette tolker jeg som at elevene ikke nødvendigvis kan eller bruker de mest presise begrepene, at de inkluderer overflødig informasjon i beskrivelsene sine (nivåindikator 2.6), at de overser enkelte egenskaper (nivåindikator 2.3) eller at de ikke logisk relaterer egenskapene til hverandre (nivånindikator 2.4).

2.6 bruker overflødig informasjon eller egenskaper når den skal identifisere og beskrive figurer i stedet for å bestemme tilstrekkelige kriterier.

Burger og Shaughnessy (1986) skriver i en nivåindikator for det andre nivået: «Application of a litany of necessary properties instead of determining sufficient properties when identifying shapes, explaining identifications, and deciding on a mystery shape» (s. 44). Et eksempel på dette er at elever kan si at et parallellogram er en firkant som har to og to parallelle sider og to og to vinkler som er like store. Dette er å inkludere overflødige egenskaper fordi det er tilstrekkelig å si at et parallellogram er en firkant med motstående parallelle sider. Gutiérrez et al. (1991)

beskriver ingenting om at elever på det andre nivået bruker overflødig informasjon eller egenskaper i arbeid med geometriske figurer. Derfor tar denne nivåindikatoren bare utgangspunkt i Burger og Shaughnessy (1986).

2.7 avslår læreverkets definisjoner til fordel for egne beskrivelser.

Nivåindikatoren er oversatt og omformulert fra «Explicit rejection of textbook definitions of shapes in favor of personal characterizations» (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 44). Med «textbook definitions» tolker jeg at de mener definisjoner av figurer som blir presentert av lærer eller læreverk. Fordi jeg skal bruke analyseverktøyet til å analysere et læreverk, velger jeg å skrive læreverkets definisjoner fremfor eksempelvis «tekstboksdefinisjoner». Campus Matte 9 sine definisjoner på todimensjonale figurer vises i figur 3.12.

Regler og eksempler

Regler

- Rettvinklet trekant: En av vinklene er 90°.
- Likebeint trekant: To sider er like lange og to vinkler er like store.
- Likesidet trekant: Alle sidene er like lange, og alle vinklene er 60°.
- Kvadrat: Firkant der alle sidene er like lange og alle vinklene er 90°.
- Rektangel: Firkant der alle vinklene er 90°.
- Parallellogram: Firkant der de motstående sidene er parallelle.
- Rombe: Parallellogram der alle sidene er like lange.
- Trapes: Firkant der minst to av sidene er parallelle.

Figur 3.12. Definisjoner av ulike todimensjonale figurer i læreverket Campus Matte 9. Hentet med tillatelse fra Campus Inkrement.

Nivåindikatoren handler om at elever på det andre nivået ikke nødvendigvis forstår betydningen av definisjoner av geometriske figurer og vil derfor ikke bruke dem. Dette henger sammen med den forrige nivåindikatoren som sier at elever inkluderer overflødig informasjon eller egenskaper og ikke klarer å bestemme tilstrekkelige kriterier.

2.8 forstår ikke at en geometrisk figur eller typer figurer kan være en del av en større klasse av figurer.

Burger og Shaughnessy (1986) skriver om elever på det andre nivået: «Prohibiting class inclusions among general types of shapes, such as quadrilaterals» (s. 44). Dette tolker jeg som at elever på dette nivået ikke forstår at et kvadrat er et rektangel, en rombe eller et parallellogram. Elever på nivå 2 vil eksempelvis tro at dersom en figur er et rektangel, kan den ikke være et kvadrat. Gutiérrez, Jaime og Fortuny (1991) skriver «nor can they logically classify solids or families of solids» (s. 242). At de skriver at elever på det andre nivået ikke kan logisk klassifisere tredimensjonale figurer eller familier av tredimensjonale figurer, tolker jeg i samme betydning som Burger og Shaughnessys (1986) nivåindikator.

2.9 bruker empiriske metoder som tegninger, måling og observasjoner når hen tester validiteten til en matematisk påstand og kan oppdage egenskaper til en figur gjennom eksperimentering.

En av Burger og Shaughnessys (1986) nivåindikatorer er «Treating geometry as physics when testing the validity of a proposition; for example, relying on a variety of drawings and making observations about them» (s. 44). Forfatterne refererer til at elever bruker empiriske metoder til å teste validiteten av en matematisk påstand. Med empiriske metoder menes at elever bruker tegninger, måling eller observasjoner til å vurdere validiteten av en matematisk påstand. Gutiérrez et al. (1991) skriver at «The students are able to discover properties of the solids by experimentation» (s. 242). Eksperimentering henger tett sammen med bruk av empiriske metoder. Det Gutiérrez med flere skriver, som Burger og Shaughnessy heller ikke skriver noe om, er at elevene har evne til å oppdage egenskaper til figurer.

Jeg vil forklare nivåindikatoren med et eksempel. En elev på det andre nivået får i oppgave å bevise påstanden «to vinkler i en trekant er like hvis og bare hvis to av sidelengdene er like». Eleven vil kunne tegne opp en eller flere trekanter med to like lange sider og måle vinklene, for så å bekrefte at to vinkler er like store. Eleven vil dermed oppdage at dette stemmer gjennom eksperimentering av få tilfeller.

2.10 mangler forståelse for matematiske bevis.

Nivåindikatoren har sitt utgangspunkt i Burger og Shaughnessy (1986) sin nivåindikator: «Explicit lack of understanding of mathematical proof» (s. 44). Elever på nivå 2 vil, som beskrevet i nivåindikator 2.9, kunne utforske påstander gjennom empiriske metoder som tegninger, måling eller observasjoner til å verifisere matematiske påstander. Elever på det andre nivået vil kunne godta sine funn som tilstrekkelig bevis fordi de ikke nødvendigvis forstår at bevis betyr generalisering for alle tilfeller.

Nivå 3 av geometrisk tenkning

En elev på nivå 3

3.1 forstår og bruker definisjoner av geometriske figurer og forstår at definisjoner er nødvendige og tilstrekkelige betingelser for geometriske figurer.

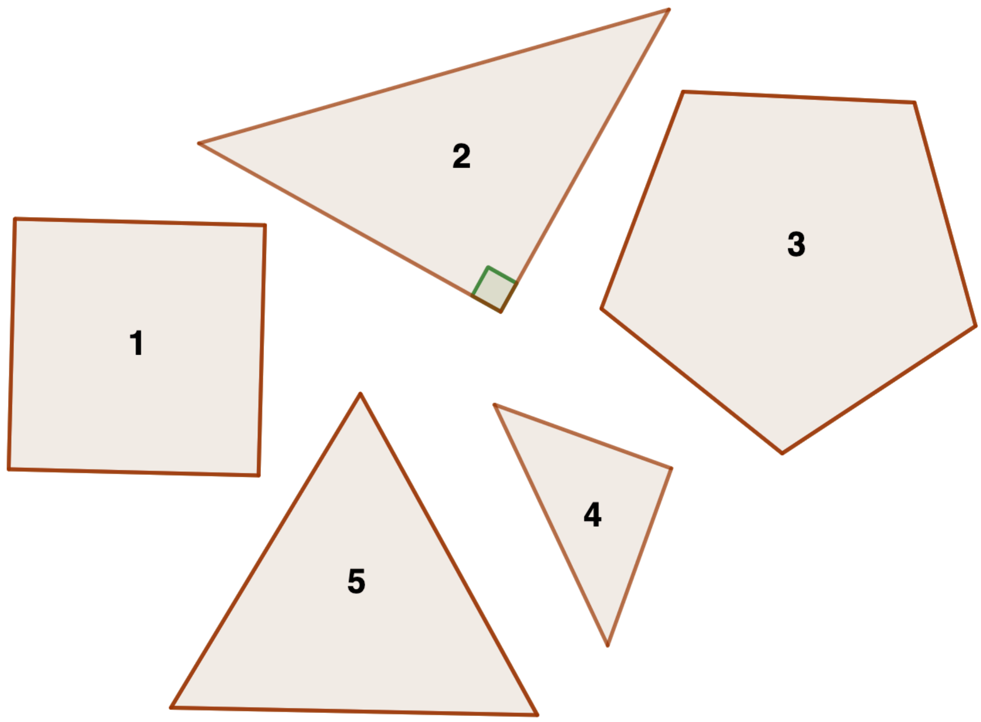
Gutiérrez et al. (1991) skriver om definisjoner på det tredje nivået: «Definitions (necessary and sufficient conditions) are meaningful for students (s. 242). I motsetning til elever på det andre nivået vil derfor elever på nivå 3 forstå definisjoner og hva som er tilstrekkelige betingelser i definisjoner av figurer. Derfor vil de ikke inkludere overflødig informasjon i sine definisjoner. Dette betyr at elevene vil godta læreverkets definisjoner og vil kunne stille seg kritisk til overflødig informasjon gitt av læreverk. Med andre ord former elever på det tredje nivået komplette definisjoner av geometriske figurer. Dette beskriver Burger og Shaughnessy (1986) i en av sine nivåindikatorer: «Formation of complete definitions of types of shapes.» (s. 44). En annen nivåindkator av Burger og Shaughnessy er «Explicit references to definitions» (s.44). Det vil si at elever ikke bare forstår og bruker definisjoner, men også refererer tydelig til dem i arbeid med geometriske figurer. Jeg har valgt å sette sammen nivåindikatorene sitert i dette avsnittet til en nivåindikator i mitt analyseverktøy fordi de utfyller hverandre.

3.2 modifiserer definisjoner, godtar likeverdige definisjoner og godtar og bruker definisjoner av nye begreper.

Burger og Shaughnessy (1986) skriver om elever på det tredje nivået: «Ability to modify definitions and immediately accept and use definitions of new concepts» (s. 44).
Den første delen av sitatet sier at elevene kan modifisere definisjoner. Et eksempel på dette kan være at eleven definerer et kvadrat som «en figur med alle egenskapene til en rombe, bare at den bare har 90 graders vinkler» i stedet for «en firkant med 90 graders vinkler og like lange sider» dersom det er naturlig i konteksten. Den andre delen av sitatet sier at elever på nivå 3 evner å umiddelbart godta og bruke definisjoner av nye begreper. I konteksten av min studie betyr det at elevene med en gang vil ta i bruk definisjonene læreverket presenterer. En annen nivåindikator som omhandler definisjoner er beskrevet i begge artiklene: they are able to handle equivalent definitions for the same concept (Gutiérrez et al., 1991, s. 242). og «Ability to accept equivalent forms of definitions». (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 44). Etter min tolkning henger disse sammen med at elevene kan modifisere definisjoner. Dersom en elev kan bruke begge definisjonene nevnt i eksempelet i dette avsnittet viser de at de kan godta likeverdige definisjoner av samme begrep. Derfor velger jeg å sette disse nivåindikatorene sammen til én nivåindikator i mitt analyseverktøy.

3.3 bruker matematisk presise egenskaper for eksempel i sorteringsoppgaver

Nivåindkatoren er en oversettelse og omformulering av «Ability to sort shapes according to a variety of mathematically precise attributes» (Burger & Shaughnessy, 1986, s. 44). Dette betyr at elever på det tredje nivået kan bruke presise egenskaper, som egenskaper til sider eller vinkler når den sorterer geometriske figurer. Jeg vil vise hva jeg mener med et eksempel hvor en elev på det tredje nivået skal sortere figurene i figur 3.13 hen mener har noe til felles.



Figur 3.13. Figurer som skal sorteres som et eksempel på hvordan elever på det tredje nivået sorterer figurer med bruk av matematisk presise egenskaper.

En elev på det tredje nivået vil kunne sortere sammen figur 1, 5 og 3 i figur 3.13 og argumentere for at de er regulære polygon fordi alle vinklene og lengdene i de respektive figurene er like store. Samtidig vil eleven kunne sortere figur 2, 4 og 5 sammen og si at de er likebeinte trekanter fordi to av sidene i hver av dem er like lange. Det som hovedsakelig skiller nivå 3-elever fra nivå 2-elever på slike oppgaver, er at de er presise og ikke inkluderer overflødig informasjon (nivåindikator 2.6). En elev på nivå 2 kan derfor argumentere for at trekanter, firkanter og femkanter ikke kan ha felles egenskaper fordi de ikke er samme type polygon. Elever på nivå 2 forstår heller ikke at trekant 2 og 5 er likesidede (nivåindikator 2.8).

3.4 forstår at en geometrisk figur kan være en del av en større klasse figurer og kan logisk klassifisere figurer og familier av figurer.

Gutiérrez, Jaime og Fortuny (1991) skriver at «The students are able to logically classify families of solids (classes of prisms or rounded solids, regular polyhedra, duality, etc.).» (s. 242). Dette betyr at elever på det tredje nivået kan bruke definisjoner til å klassifisere eksempelvis prismer og pyramider som regulære polyeder (tredimensjonale figurer med regulære polygon som flater hvor flatene møtes i hjørnene). Det betyr også at elevene på dette nivået vil klassifisere kvadrater som blant annet rektangler og parallellogram. Burger og Shaughnessy (1986) skriver en nivåindikator som omhandler det samme: «Acceptance of logical partial ordering among types of shapes, including class inclusions» (s. 44). Jeg mener denne formuleringen er mindre konkret og velger derfor å ta utgangspunkt i Gutiérrez med flere sin formulering i min nivåindikator.

3.5 kan forme korrekte uformelle deduktive argumenter ved bruk av logikk.

Deduktive argumenter er når man trekker en slutning fra noe allment til et enkelttilfelle (Hana, 2013, s. 85). Burger og Shaughnessy (1986) skriver to nivåindikatorer som handler om elevenes evner til å forme korrekte uformelle deduktive argumenter. Den første er «Ability to form correct informal deductive arguments, implicitly using such logical forms as the chain rule (if p implies q and q implies r, then p implies r) and the law of detachment (modus ponens)» (s.44) Sitatet sier at elever på det tredje nivået former uformelle deduktive argumenter gjennom «chain rule» og «law og detachment/modus ponens». Førstnevnte kan være deduktiv argumentasjon av typen: hvis et kvadrat er et rektangel og et rektangel er et parallellogram, så må et kvadrat være et parallellogram. *Law of detachment* eller *modus ponens* er argumentasjon av typen «hvis, så», for eksempel «hvis en figur har tre hjørner, så har den tre vinkler». At argumentene er uformelle vil bety at elever på nivå 3 ikke vil formulere seg helt likt som i eksemplene over, men at det de vil kunne argumentere på lignende logisk form.

Den andre nivåindikatoren Burger og Shaughnessy skriver om deduktive argumenter er: «Explicit use of "if, then" statements» (s. 44). Denne henger tett sammen med nivåindikatoren sitert i avsnittet over. Forskjellen på de to nivåindikatorene til Burger og Shaughnessy (1986) er at i den første står det at elever på det tredje nivået implisitt bruker «hvis, så» argumentasjon, mens i den andre står det at elevene også eksplisitt bruker «hvis, så»-uttrykk. Fordi analyseverktøyet skal brukes til å analysere et læreverk, vil det ikke være relevant om elever bruker argumentasjonsformer eller logikkformer eksplisitt eller implisitt. Derfor velger jeg å sette de to nivåindikatorene til Burger og Shaughnessy (1986) som er nevnt i dette avsnittet sammen til én nivåindikator. Nivåindikatoren underbygges av Gutiérrez et al. (1991) som skriver om elever på det tredje nivået «They can give informal arguments for their deductions» (s. 242). Jeg velger å ta utgangspunkt i Burger og Shaughnessy (1986) sin formulering fordi den er mer presis.

3.6 kan følge noen formelle bevis gitt av lærer eller læreverk og kan bare gjøre enkle slutninger selv.

Burger og Shaughnessy (1986) skriver ikke noe om elever på det tredje nivået kan gjøre formelle bevis. Det gjør derimot Gutiérrez, Jaime og Fortuny (1991): «they can follow some formal proofs given by the teacher or the textbook» (s. 242). Dette tolker jeg som at elevene kan følge enkelte bevis dersom læreverket (i konteksten av min studie) støtter dem og hjelper dem videre. Deretter skriver Gutiérrez et al. (1991) at «they are only able to carry out simple inferences by themselves» (s. 242). *Simple inferences* oversetter jeg til *enkle slutninger*.

3.7 blander rollene til aksiomer og teoremer.

Denne nivåindikatoren sier noe om årsakene til at elever på det tredje nivået ikke klarer å selvstendig gjøre formelle bevis. Nivåindkatoren er en oversettelse av «Confusion between the roles of axiom and theorem» (Burger & Shaughnessy, 1986. 44). Aksiomer beskrives ofte som ubeviste påstander (Veblen, 1904, s. 844). De trenger ikke å bevises fordi de er allment ansett for å være sanne. Veblen (1904) skriver at det finnes et endelig antall aksiomer og at alle matematiske utsagn kan bli utledet fra aksiomene. I tillegg kan ingen aksiomer bli utledet fra andre aksiomer. Et eksempel på et aksiom er «hvis punktene A, B, C er i rekkefølgen ABC, så er de også i rekkefølgen CBA» (Veblen, 1904, s. 344, egen oversettelse). Teoremer utledes med aksiomer, og må dermed bevises. Det betyr at aksiomer er grunnlaget for alle teoremer. Et eksempel på et teorem er Pytagoras læresetning ($a^2 = b^2 + c^2$). At elever på det tredje nivået er forvirret av rollene til aksiomer og teoremer kan eksempelvis bety at de vil forsøke å bevise aksiomer eller at de ikke bruker aksiomer som grunnlag når de forsøker å bevise en påstand.

3.3 Anvendelse av analyseverktøy

Analyseverktøyet skal brukes til å analysere forelesningsvideoer, kontrollspørsmål og oppgaver innenfor leksjonene «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer» og «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer» i læreverket Campus Matte 9. I dette kapitlet skal jeg beskrive hvordan analyseverktøyet brukes til å analysere oppgavesamlingene og forelesningene innenfor de aktuelle leksjonene på Campus Matte 9. Jeg vil først beskrive hvordan jeg skal analysere videoene for så å beskrive hvordan kontrollspørsmål og oppgaver skal analyseres.

3.3.1 Anvendelse av analyseverktøyet til analyse av forklaringer i videoer

I forkant av analysen ble alle videoene transkribert. Kategoriene ble i tråd med det jeg skrev om innholdsanalyse, utformet i forkant av analysen. Analysekategoriene tar utgangspunkt i de tre første nivåene i van Hieles teori. Fordi nivåene er hierarkiske (Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1985; Mayberry, 1983; Gutiérrez et al., 1991; Pegg, 1992), vil en elev som tenker på nivå n+1 og høyere forstå forklaringer en elev på nivå n kan forstå. Derfor er kategoriene:

1. Nivå 1: Forklaringer elever på det første nivået og høyere vil forstå
2. Nivå 2: Forklaringer elever på det andre nivået og høyere vil forstå
3. Nivå 3: Forklaringer elever på det tredje nivået og høyere vil forstå

For å plassere en forklaring i en kategori, brukte jeg analyseverktøyet. Flere av nivåindikatorene handler direkte om forståelse, og det var derfor mulig å analysere innholdet med dette spørsmålet: har en elev på nivå x forutsetning til å forstå denne forklaringen? Deretter så jeg gjennom nivåindikatorene i analyseverktøyet og forsøkte å finne en nivåindikator som kunne bekrefte eller avkrefte spørsmålet. Dersom svaret på spørsmålet var ja, ble forklaringen kategorisert i kategorien som tilsvarer det aktuelle nivået. Hvis ikke gikk jeg videre til neste nivå og gjentok strategien. Analysen ble gjort flere ganger for å sikre at dataen kan kobles til nivåindikatorer knyttet til kategorien.

3.3.2 Anvendelse av analyseverktøyet til analyse av kontrollspørsmål og oppgaver

I analysen vil kontrollspørsmål og oppgaver analyseres på samme måte fordi de begge er oppgaver. Kategoriene på samme bakgrunn som kategoriene presentert i forrige delkapittel og disse er:

1. Nivå 1: oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 1 eller høyere.
2. Nivå 2: Oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 2 eller høyere.
3. Nivå 3: Oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 3 eller høyere.

En fjerde kategori ble identifisert i flere oppgaver i leksjonen om egenskaper til todimensjonale figurer. Disse oppgavene kunne i utgangspunktet bli tildelt et nivå etter analyseverktøyet, men det var ikke mulig å svare korrekt på dem. Et eksempel på en oppgave i denne kategorien vil bli vist i kapittel 4. Derav formulerte jeg en fjerde kategori som er:

4. Oppgaver uten mulighet til å avgi korrekt svar.

Som beskrevet under presentasjonen av analyseverktøyet, blir van Hieles teori vanligvis brukt til å tildele nivåer til elever. Fordi en oppgave ikke viser tenkning i seg selv, er det ikke naturlig å sette et van Hiele nivå til en oppgave. Det ville vært mulig å bruke analyseverktøyet til å analysere Campus Matte 9 sine løsningsforslag til oppgavene. Campus Matte 9 inneholder ikke løsningsforslag til oppgavene, og derfor er ikke det et alternativ. Det jeg derimot kan gjøre er å lage egne løsningsforslag og bruke analyseverktøyet (nivåindikatorene) til å beskrive hvilke nivåer av geometrisk tenkning som kreves for å produsere et korrekt løsningsforslag.

Hvis en oppgave kan løses ved tenkning tilsvarende det første nivået vil jeg sette oppgaven i kategorien nivå 1: *oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 1 eller høyere*. Dersom det ikke er mulig å komme frem til riktig svar på oppgaven gjennom tenkning på det første nivået vil jeg gå videre og vurdere om oppgaven kan løses ved tenkning som tilhører nivå 2. Hvis oppgaven kan løses ved tenkning som tilsvarer nivå 2, vil oppgaven kategoriseres i den andre kategorien: nivå 2: *oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning* *tilhørende nivå 2 eller høyere.* Dersom oppgaven verken kan løses ved tenkning på det første eller andre nivået vil jeg vurdere om den kan løses ved tenkning som indikerer det tredje nivået. Hvis ja, vil oppgaven kategoriseres i den tredje kategorien, nivå 3*: oppgaver som kan løses ved geometrisk tilhørende nivå 3 eller høyere.* Det er tilstrekkelig at oppgaven som analyseres kan løses med et av resonnementene (nivåindikator) innenfor det aktuelle nivået for å bli satt i kategorien som samsvarer med nivået.

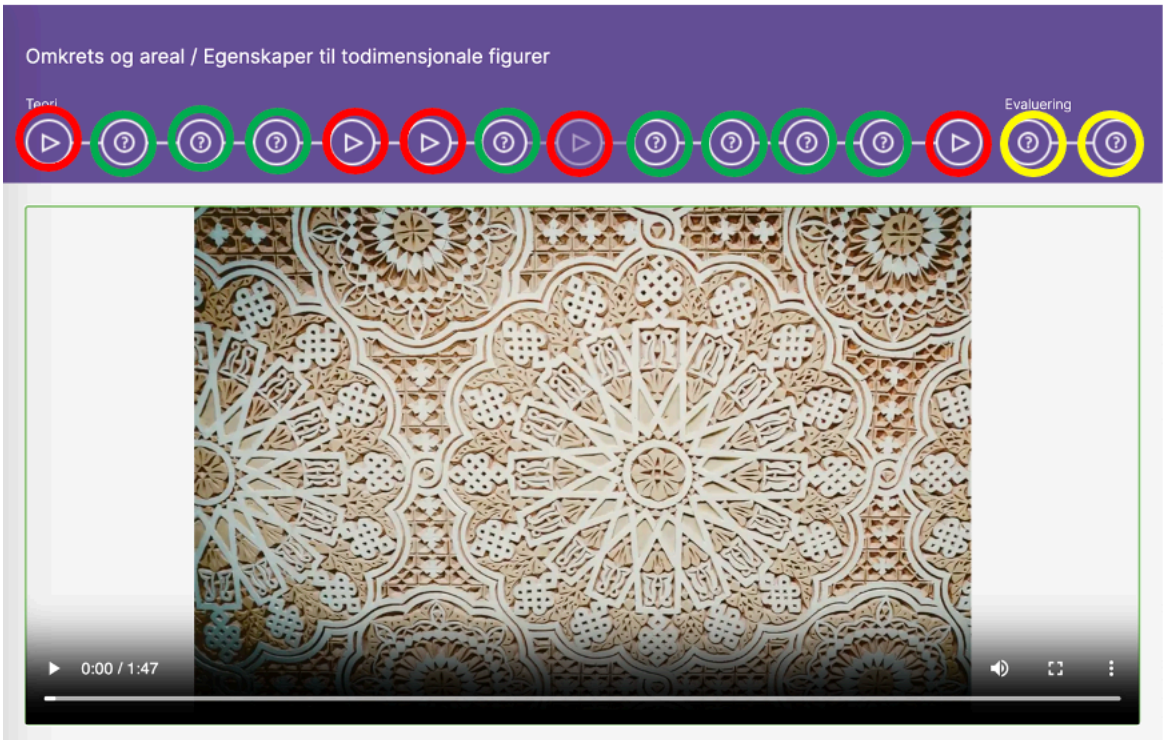
En faktor jeg må ta stilling til i analysen av oppgavene er oppgavetyper. Totalt er 29 av de 44 oppgavene jeg analyserer fra oppgavesamlingen flervalgsoppgaver. Det tilsvarer 66% av oppgavene. Innenfor emnet *egenskaper ved todimensjonale figurer* er 17 av 29 oppgaver (59%) flervalgsoppgaver. I emnet *egenskaper ved tredimensjonale figurer* er 12 av 15 oppgaver (80%) flervalgsoppgaver. Flervalgsoppgaver åpner for at elever kan få riktige svar ved gjetning. Samtidig finnes det en funksjon på Campus Matte hvor elevene kan trykke på «vis fasit» før de har svart på en oppgave. Dette er en funksjon læreren kan deaktivere for elevene. Dersom elevene har funksjonen, vil de kunne få vist fasit for så å svare riktig. Flervalgsoppgaver og funksjonen «vis fasit» kan medføre at elever oppnår riktig svar uten å ha riktig tenkning eller å tenke i det hele tatt. Jeg vil beskrive hvilke oppgavetyper de ulike oppgavene er i analysen, men jeg velger å ikke ta det i betraktning i kategorisering av oppgavene. Det er fordi jeg ønsker å finne ut hvilke nivå av geometrisk tenkning som er nødvendig for å løse oppgavene korrekt *uten* gjetning.

3.4 Empiriske data

I denne studien skal jeg analysere hvordan Campus Matte 9 tilpasser forelesninger og oppgaver til elever med ulike nivå av geometrisk tenkning. Derfor er det naturlig at den empiriske dataen består av forelesninger og oppgaver. I dette delkapitlet skal derfor forelesninger og oppgaver fra de to leksjonene «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer» og «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer» presenteres og beskrives. Skjermbilder vises underveis for å gi en bedre forståelse for den empiriske dataen. Skjermbildene i kapitlet vises med tillatelse fra Campus Inkrement.

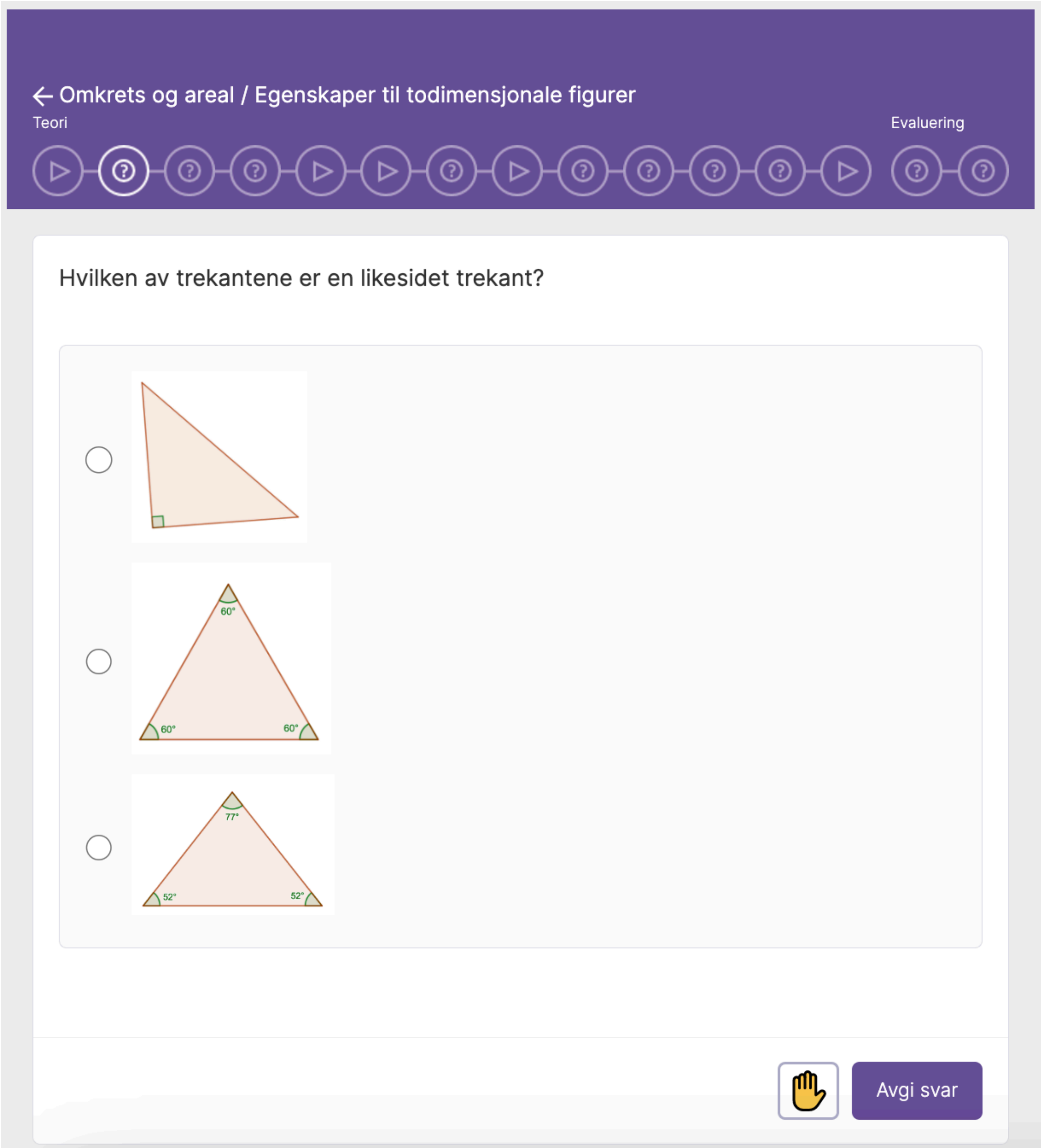
3.4.1 Forelesninger

Forelesningene består av teori, kontrollspørsmål og evaluering. Jeg vil nå forklare nærmere hva de ulike delene er (se figur 3.14) og vise eksempler fra empirien i denne studien.



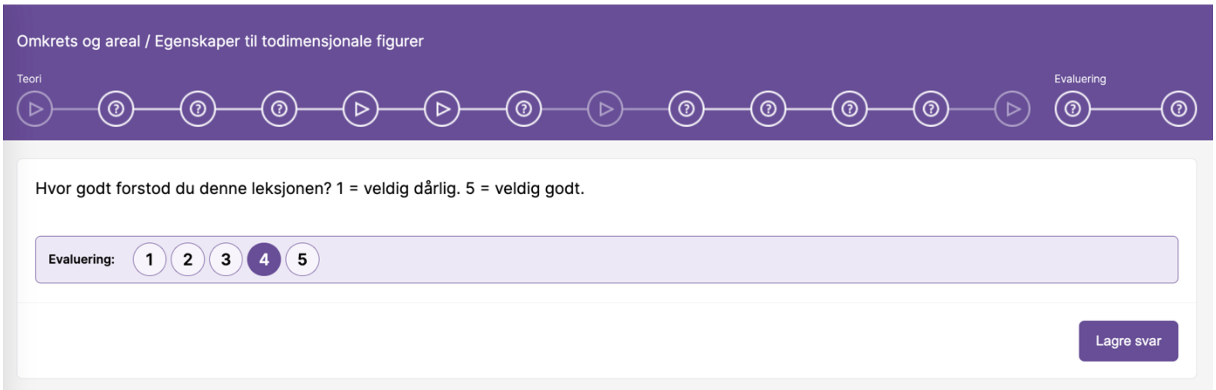
Figur 3.14. Eksempel på hvordan en forelesning i en leksjon kan se ut. Videoer er markert med rødt, kontrollspørsmål med grønt og evaluering med gult. Hentet med tillatelse fra Campus Inkrement.

Teorien i forelesningene består av korte videoer hvor innholdet i den aktuelle leksjonen blir presentert, illustrert, beskrevet og/eller forklart. Symbolet for video er markert i rødt i figur 3.14. Mellom videoene er det ofte et eller flere kontrollspørsmål. Symbolet for kontrollspørsmål er markert med grønt i figur 3.14. Kontrollspørsmål er oppgaver som henger sammen med innholdet i videoene. Et eksempel på et kontrollspørsmål vises i figur 3.15.

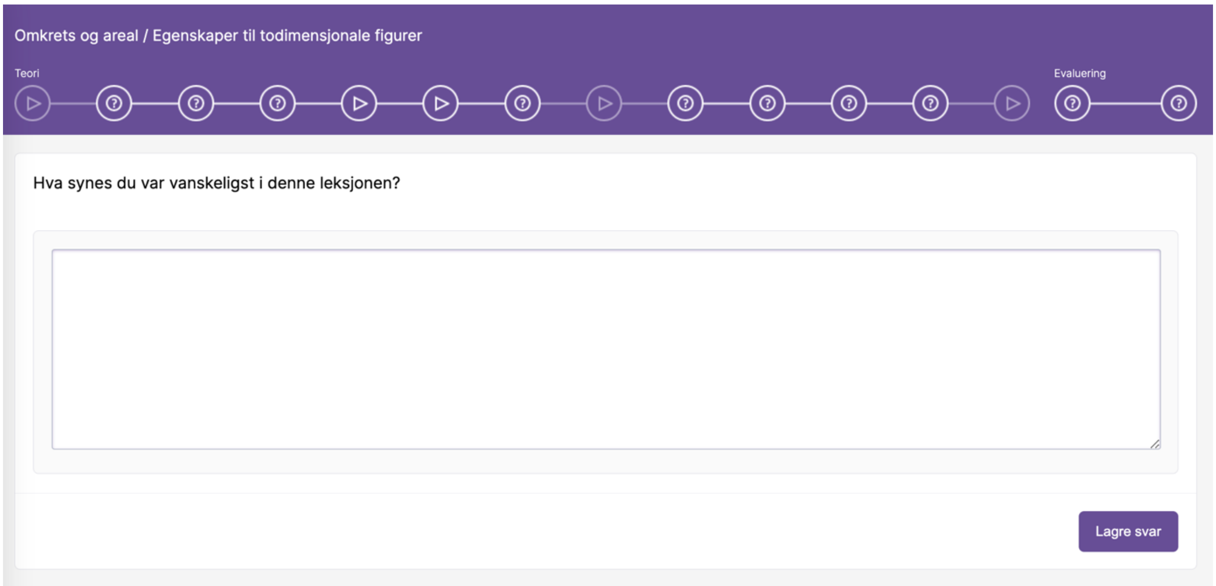


Figur 3.15. Eksempel på et kontrollspørsmål fra forelesningen i leksjonen «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer».

På slutten av hver forelesning er det to evalueringsspørsmål som elevene skal svare på. Disse er markert med gul sirkel i figur 3.14. Evalueringsspørsmålene er de samme for alle leksjonene i Campus Matte 9 og disse vises i figur 3.16 og 3.17. Det er ikke mulig å analysere evalueringsdelen av forelesningene med analyseverktøyet og de vil derfor ikke analyseres i denne studien.



Figur 3.16. Evalueringsspørsmål hvor eleven skal svare på hvor godt den forstod leksjonen.



Figur 3.17. Evalueringsspørsmål hvor eleven skal skrive hva den synes var vanskeligst i leksjonen.

3.4.2. Oppgaver

Alle leksjoner på Campus Matte 9 inneholder oppgavesamlinger. Oppgavesamlingene består av nivådifferensierte oppgaver (grønn løype, rød løype og svart løype). I tillegg inneholder de noen «gule» oppgaver. Oppgaver markert med gult i Campus Matte er åpne oppgaver som kan løses på flere måter (Campus Inkrement, u.å). De gule oppgavene i oppgavesamlingene som analyseres i studien handler om areal, omkrets, volum og beregning av overflate og kan ikke analyseres ved hjelp av analyseverktøyet. Derfor vil disse ikke analyseres og de vil dermed ikke bli beskrevet nærmere.

Utvalget av oppgaver fra leksjon «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer» som utgjør empiri i denne studien er 29 oppgaver. Av disse oppgavene er 7 fra grønn løype, 14 fra rød løype og 7 fra svart løype. Utvalget av oppgaver fra den andre leksjonen «2.1. Egenskaper til tredimensjonale figurer» består av 15 oppgaver hvorav 12 er fra grønn løype og 3 er fra rød løype. Eksempler på oppgaver fra Campus Matte 9 illustreres i kapittel 4.

3.5 Validitet og reliabilitet

To kriterier som er med å sikre kvalitet i forskningsprosjekter er validitet og reliabilitet. Validitet handler om at dataen i forskningen «gir gyldige og sannferdige uttrykk for de egenskapene vi ønsker å måle» (Befring, 2020, s. 37). For å styrke muligheten for å oppnå valide data er det ifølge Befring (2020) flere kriterier som må oppfylles. Det viktigste av disse kriteriene i min studie handler om operasjonelle definisjoner av nivåindikatorene. Dette er viktig fordi teorien og forskningen til Burger og Shaughnessy (1986) og Gutiérrez, Jaime og Fortunys (1991) ikke har blitt brukt til å analysere læringsinnhold som videoer og oppgaver før. Operasjonalisering av nivåindikatorene ble forklart i kapittel 3.2.

Reliabilitet uttrykker nøyaktighet og stabilitet i dataene (Befring, 2020). I min studie har jeg analysert hele utvalget flere ganger for å sikre at jeg har kategorisert dataen riktig. Jeg har knyttet alle videoer og oppgaver jeg har analysert til nivåindikatorer i analyseverktøyet. Vil jeg argumentere for at mine funn er troverdige i forhold til analyseverktøyet. Noe som derimot kan svekke reliabiliteten i studien, er manglende forskning å sammenligne funnene med. Dette fører til at diskusjonsdelen av oppgaven er kortere enn jeg ønsker. Samtidig er ikke formålet med studien å generalisere funnene til å gjelde andre læreverk og derfor mener jeg det ikke svekker kvaliteten på studien nevneverdig.

3.6 Etiske betraktninger

Når man gjennomfører forskning er det krav om at man forankrer den i anerkjente etiske verdier (Befring, 2020). De grunnleggende verdiene kalles forskningsetiske prinsipper. Jeg vil nå beskrive de forskningsetiske prinsippene som er relevant for min studie og forklare hvilke hensyn jeg har tatt i forhold til dem.

Forskning skal ikke skade deltakerne (Bryman, 2016). I min studie er deltakeren læreverket Campus Matte som igjen er en del av tjenesten Campus Inkrement. Formålet med studien er ikke å vurdere kvaliteten av læreverket, men heller å gi skoler og andre kunder av tjenesten informasjon som gjør at de kan bruke læreverket på en hensiktsmessig måte. Gjennom analyseprosessen kom jeg opp i et dilemma hvor jeg, som beskrevet i kapittel 3.3, fant at det ikke går an å svare riktig på flere av kontrolloppgavene. Samtidig er redelighet en viktig verdi når man bedriver forskning (Befring, 2020). Ifølge Befring er man redelig når man er ærlig og troverdig. Jeg belyser ikke feil i oppgavene for å skade omdømmet til Campus Inkrement. Derimot gjør jeg Campus Inkrement oppmerksom på feilen, slik at de kan bli oppmerksomme på det og rette opp i den. Samtidig ønsker jeg å være ærlig ovenfor nåværende og potensielle kunder av læreverket. Ikke fordi jeg på noen måte vil fraråde dem fra et kundeforhold, men for at de skal kunne utnytte læreverket best mulig.

Et annet forskningsetisk prinsipp er at all deltakelse skal bygge på fritt, informert samtykke (Befring, 2020). Det innebærer at deltakeren skal være innforstått med hva deltakelsen innebærer og hva forskningsprosjektet handler om. I tillegg skal den stå fritt til å bestemme selv om den vil delta eller ikke. Campus Inkrement ble kontaktet og informert om mitt prosjekt. De svarte at det bare er hyggelig å delta og ga meg umiddelbart tilgang til læreverket. Campus Inkrement ønsker at studenter som forsker på læreverkene deres forstår omfanget av læreverket og ba om at jeg gjorde meg godt kjent med det. Jeg har selv brukt videoer på Campus Matte i mange år, og brukte i tillegg god tid på å sette meg inn i Campus Matte 9 på måten Campus Inkrement anbefalte. Dette ga meg en god forståelse for læreverket og dermed et etisk forsvarlig grunnlag til å analysere det.

Et annet viktig etisk prinsipp er at man skal være tydelig på hvilke deler av teksten som er hentet fra andres verk (Bryman, 2016). Det har jeg gjort gjennom å bruke kildehenvisninger som gjør det tydelig hvem som er originalforfatter av innholdet jeg bruker som ikke er mitt eget arbeid. Samtidig er mange av figurene i denne oppgaven skjermbilder fra Campus Matte. Disse har jeg fått tillatelse av Campus Inkrement til å bruke.

4.0 Analyse

I denne delen presenteres analysen av datamaterialet. Totalt består datamaterialet av 7 videoer og 13 kontrollspørsmål fra forelesninger og 44 oppgaver fra oppgavesamlinger. På grunn av oppgavens omfang, vil jeg ikke presentere hele analysen. Innholdet som analyseres i denne delen er valgt ut slik at jeg presenterer et eksempel på analyse innenfor todimensjonale figurer og et innenfor tredimensjonale figurer per kategori. Analysen gjøres for å kunne besvare forskningsspørsmålene i oppgaven som er:

I. Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for å forstå forklaringer i videoene i forelesningene?
II. Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for svare riktig på kontrollspørsmålene i forelesningene?
III. Hvilke nivåer kreves for å løse oppgavene i oppgavesamlingene?
IV. Hvilken sammenheng finnes mellom vanskelighetsgrad på oppgavene i Campus Matte 9 og nivå av geometrisk tenkning som kreves for å løse dem?

Gjennom forskningsspørsmålene vil jeg besvare problemstillingen i oppgaven: *hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for å forstå forklaringer og løse oppgaver innenfor egenskaper til geometriske figurer på Campus Matte 9, og hvilken sammenheng har nivåene med vanskelighetsgrad på oppgavene?*

Analysekapitlet er delt i fire delkapitler. I de tre første delkapitlene vil jeg presentere analysen av datamaterialet. Først presenteres analysen av forklaringer fra videoer, deretter kontrollspørsmålene og til slutt presenteres analysen av oppgavesamlingene. I hvert av disse delkapitlene vil analysen presenteres kategori for kategori. Jeg vil referere til nivåindikatorer fra analyseverktøyet gjennom hele analysedelen. Analyseverktøyet oppsummeres under:

Nivå 1 av geometrisk tenkning

En elev på nivå 1

1.1 kan kjenne igjen og navngi figurer dersom figurene samsvarer med prototyper av figurer samt bedømmer, beskriver og skiller mellom figurer på et visuelt grunnlag og bruker argumentasjon av typen «det ser ut som ...».

1.2 sorterer figurer etter egenskaper figurene ikke har til felles.

1.3 bruker upresise egenskaper til å sammenligne, identifisere, beskrive og sortere figurer.
1.4 bruker figurens orientering når den identifiserer, navngir og beskriver figurer.
1.5 betrakter figurer som en helhet og tar ikke hensyn til deler av eller egenskaper til en figur når de skal identifisere og navngi figurer og forstår ikke at egenskaper er nødvendige betingelser for at en figur skal tilhøre en bestemt type figur.
1.6 oppfatter ikke at det finnes uendelig mange varianter av typer figurer.

Nivå 2 av geometrisk tenkning

En elev på nivå 2
2.1 identifiserer deler av figurer og forstår at figurer bærer sine egenskaper.
2.2 bruke egenskaper til deler av figurer i oppgavesituasjoner.
2.3 sorterer figurer etter én egenskap, mens den overser andre egenskaper.
2.4 kan ikke logisk relatere egenskaper til hverandre.
2.5 beskriver figurer etter egenskaper på en uformell måte.
2.6 bruker overflødig informasjon eller egenskaper når den skal identifisere og beskrive figurer i stedet for å bestemme tilstrekkelige kriterier.
2.7 avslår læreverkets definisjoner til fordel for egne beskrivelser.
2.8 forstår ikke at en geometrisk figur eller typer figurer kan være en del av en større klasse av figurer.
2.9 bruker empiriske metoder som tegninger, måling og observasjoner når hen tester validiteten til en matematisk påstand og kan oppdage egenskaper til en figur gjennom eksperimentering.
2.10 mangler forståelse for matematiske bevis.

Nivå 3 av geometrisk tenkning

En elev på nivå 3
3.1 forstår og bruker definisjoner av geometriske figurer og forstår at definisjoner er nødvendige og tilstrekkelige betingelser for geometriske figurer.
3.2 modifiserer definisjoner, godtar likeverdige definisjoner og godtar og bruker definisjoner av nye begreper.
3.3 bruker matematisk presise egenskaper for eksempel i sorteringsoppgaver.
3.4 forstår at en geometrisk figur kan være en del av en større klasse figurer og kan logisk klassifisere figurer og familier av figurer.
3.5 kan forme korrekte uformelle deduktive argumenter ved bruk av logikk.

3.6 kan følge noen formelle bevis gitt av lærer eller læreverk og kan bare gjøre enkle slutninger selv.
3.7 blander rollene til aksiomer og teoremer.

Dersom jeg eksempelvis skal referere til nivåindikator 1.1 i analysen, vil jeg først gjenta kort hva den handler om og skrive nummereringen i parentes slik: (1.1). På grunn av omfanget til oppgaven, vil jeg ikke presentere en detaljert analyse av alt datamaterialet. I stedet vil jeg vise én grundig analyse av datamateriale om todimensjonale figurer og én om tredimensjonale figurer under hver kategori. Til slutt i dette kapitlet, vil jeg presentere resultatene fra analysen. Skjermbildene i kapitlet vises med tillatelse fra Campus Inkrement.

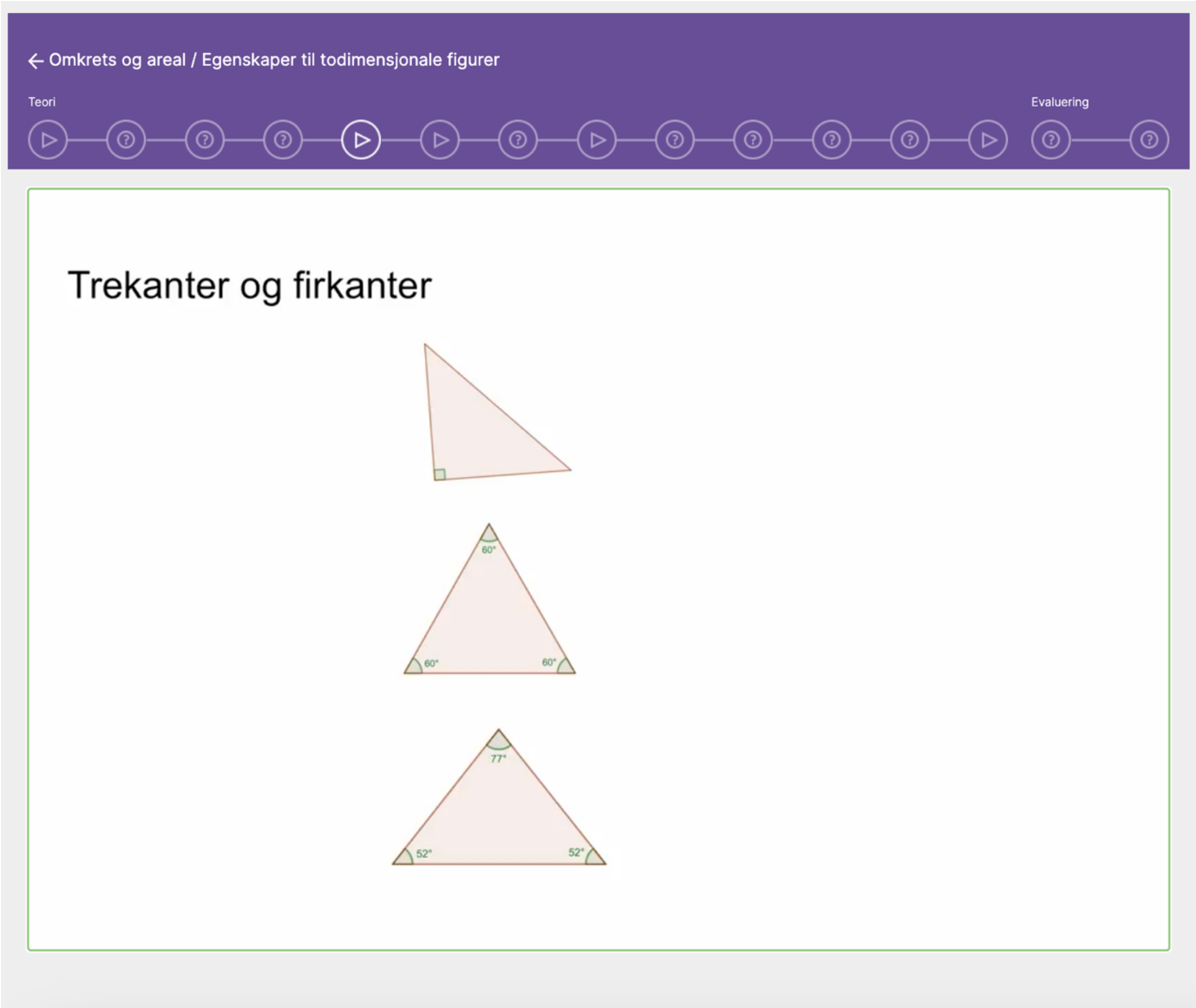
4.1 Analyse av forklaringer i forelesninger

I denne delen analyseres forklaringer gitt gjennom videoer i de to forelesningene fra leksjonene «2.1 Egenskaper til todimensjonale figurer» og «2.2 Egenskaper til tredimensjonale figurer». Samtlige kategorier ble identifisert i videoene i leksjonen «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer». I leksjonen «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer» ble de to første kategoriene identifisert.

4.1.1 Nivå 1: Forklaringer elever på det første nivået og høyere vil forstå

Analysen av forklaringer i dette delkapitlet er kategorisert som nivå 1.

I den andre videoen i forelesningssekvensen i leksjonen «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer» blir ulike typer trekanter navngitt. Trekantene som navngis er vist i figur 4.1.

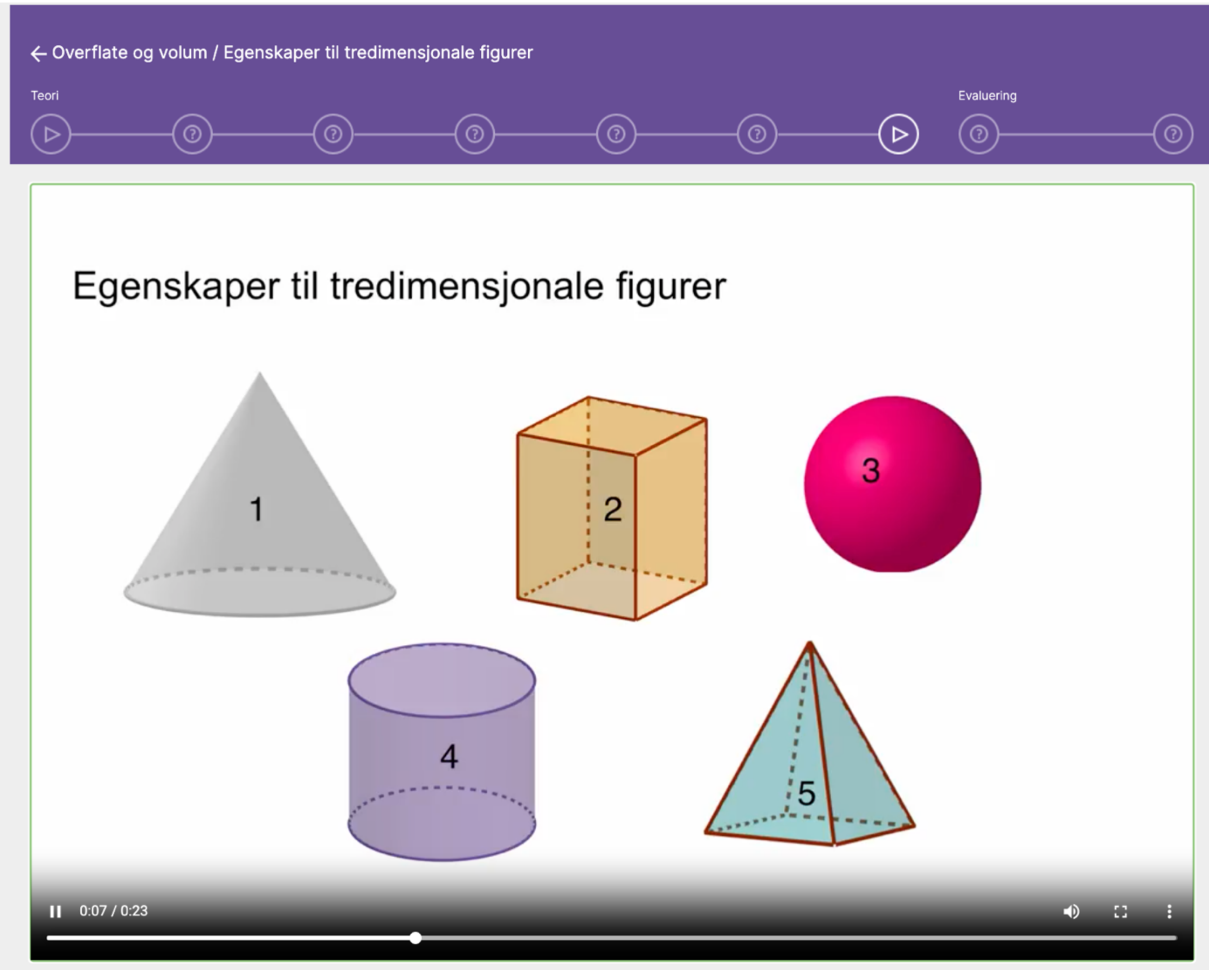


Figur 4.1. Skjermbilde av den andre videoen i forelesningen om egenskaper til todimensjonale figurer.

Campus matte navngir figurene i rekkefølge fra øverst til nederst:
«Nå skal vi se på hvilke ulike typer trekanter vi har her. Den første kaller vi for en rettvinklet trekant ... Den neste er en likesidet trekant». Dette sitatet er kategorisert som nivå 1. Elever på det første nivået vil kunne kjenne igjen og navngi figurer dersom de ligner på eller ikke skiller seg nevneverdig fra prototyper av figurer (1.1). Prototyper av typer trekanter vises i figur 3.1.

Den rettvinklede trekanten i forelesningsvideoen er rotert annerledes enn prototypen, men ellers er de visuelt ganske like. Fordi forskjellen i rotasjon mellom trekanten i oppgaven og prototypen er ikke stor, mener jeg at en elev på nivå 1 vil kunne kjenne igjen og navngi figuren. Orienteringen av den likesidede trekanten i videoen er identisk med prototypen og de er også ellers like. Derfor vil elever på nivå 1 kunne kjenne igjen og navngi den andre figuren som en likesidet trekant. At den tredje trekanten er likesidet vil ikke nødvendigvis elever på det første nivået forstå fordi den skiller seg fra prototypen og kan ligne mer på en likesidet trekant for dem.

I den siste videoen i forelesningen i leksjonen «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer» navngis fem ulike tredimensjonale figurer (figur 4.2).

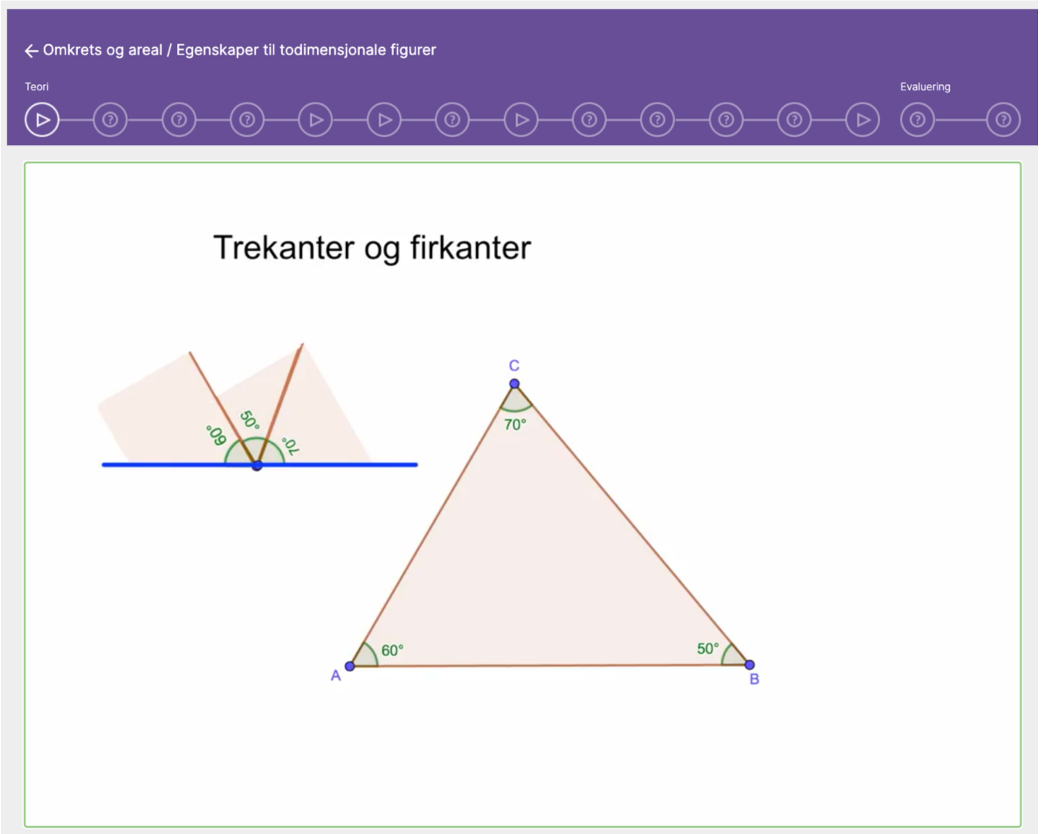


Figur 4.2. Skjermbilde fra den andre og siste forelesningsvideoen i leksjonen «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer».

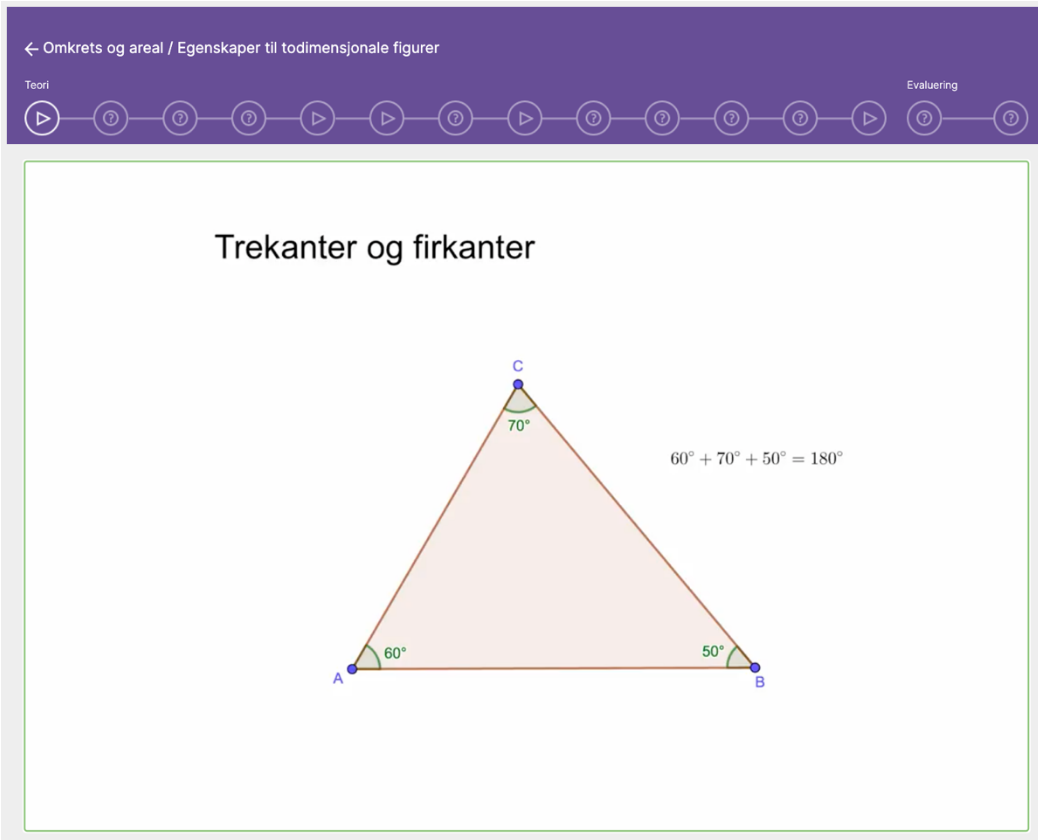
De tredimensjonale figurene i videoen (figur 4.2) er nummererte og blir navngitt i stigende rekkefølge: «Då skal vi se litt nærmere på hva disse figurene heter. Den første ... heter en kjegle. Nummer to, det er et prisme. Nummer tre var kule. Fire her det var en sylinder. Og nummer fem var en pyramide.». De tredimensjonale figurene ligner på prototyper av tredimensjonale figurer (figur 3.5), som betyr at elever på det første nivået kan kjenne igjen og navngi figurene (1.1). Det medfører at innholdet i sitatet vil være meningsfylt for elever på det første nivået, hvilket gjør at de vil forstå innholdet.

4.1.2 Nivå 2: Forklaringer elever på det andre nivået og høyere vil forstå

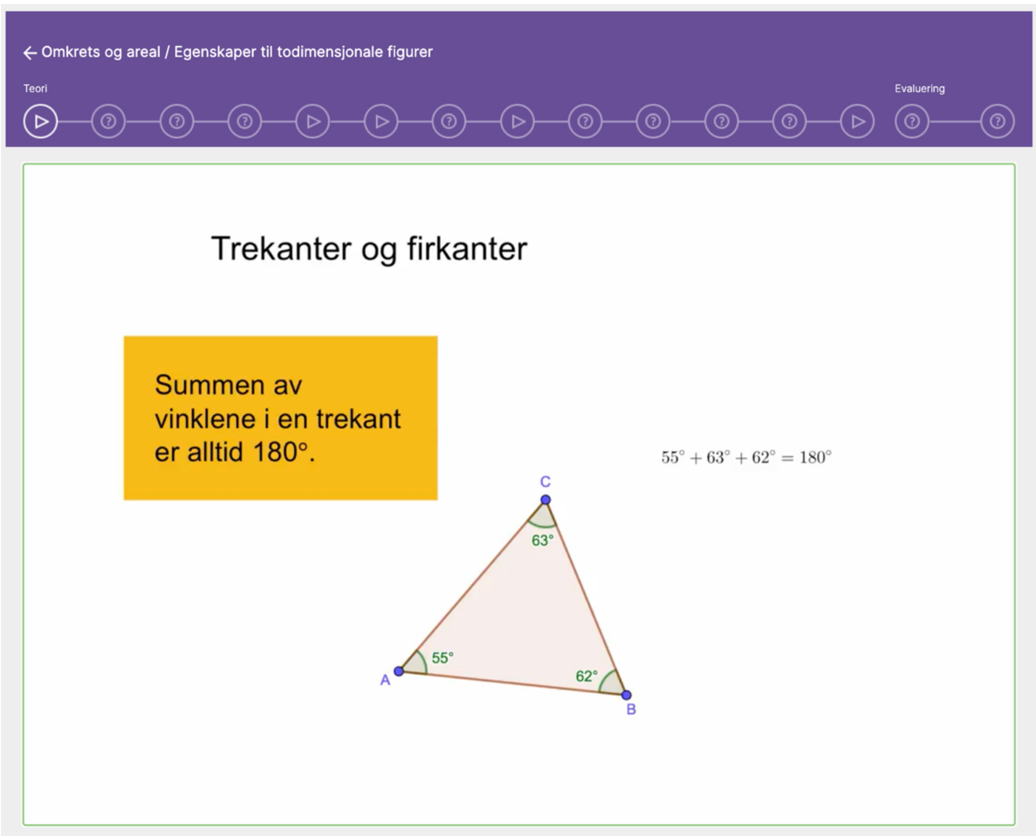
Forklaringene som analyseres i dette delkapitlet er kategorisert som nivå 2. Den første forelesningsvideoen i leksjonen «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer» viser blant annet flere måter å finne vinkelsummen til trekanter (figur 4.3 og 4.4). I tillegg viser videoen at vinkelsummen i en trekant er 180 grader selv om man endrer størrelsene på de ulike vinklene (figur 4.5).



Figur 4.3: Vinklene i trekanten blir satt inntil hverandre for å vise at vinkelsummen i er 180 grader.



Figur 4.4. Vinkelsummen i trekanten blir vist ved regning.



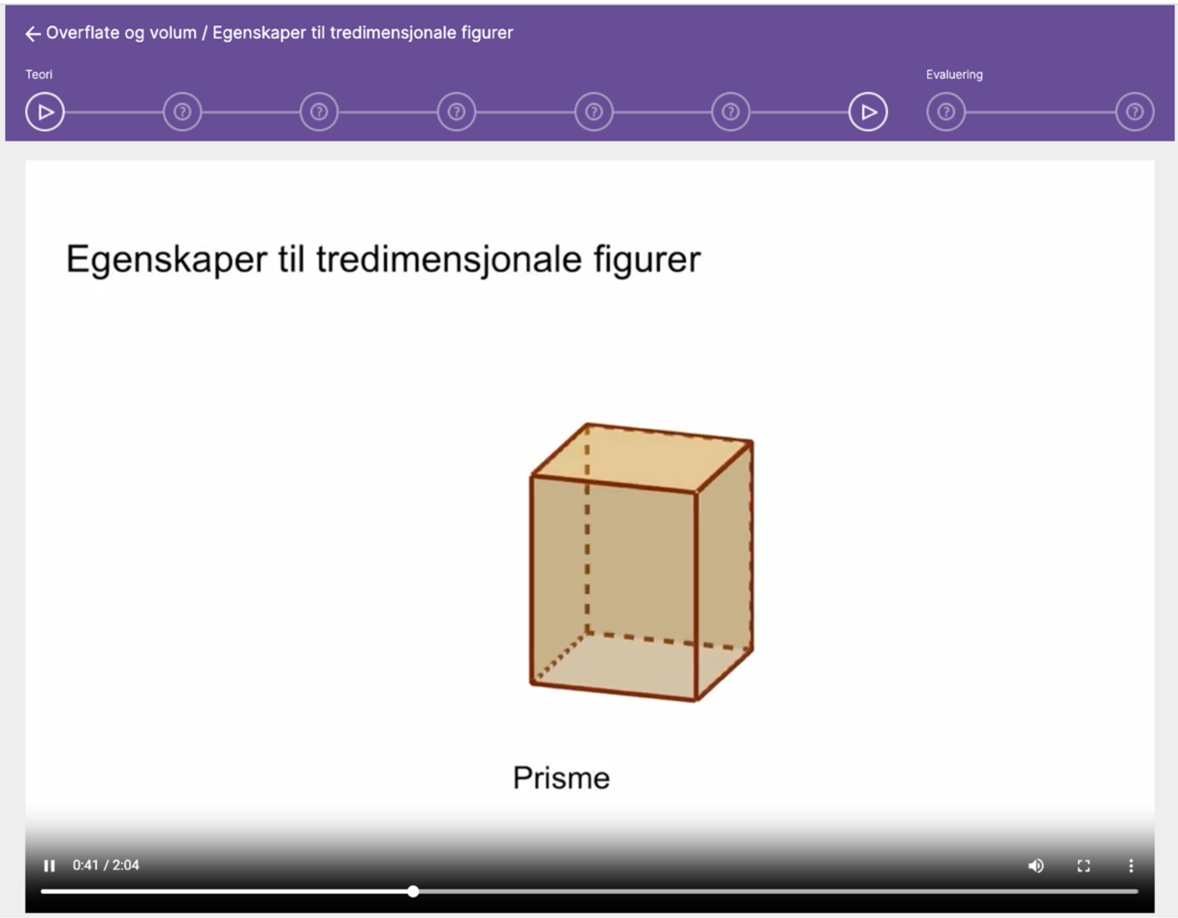
Figur 4.5. Vinklene i trekanten endres flere ganger. Regnestykket viser at uavhengig av hvordan vinklene endres, vil vinkelsummen være 180 grader.

I videoen forklarer Campus Matte:

> «... hvis jeg nå tar alle disse vinklene og setter de ved siden av hverandre, så ser jeg det at summen av vinklene blir 180 grader. Det kan jeg også vise ved å summere de: 60 + 70+50 er 180. Og hvis jeg nå tar og endrer på trekanten, og lager den litt annerledes, så ser vi det at summen av vinklene vil alltid være 180 grader. Så dermed har vi en regel: summen av vinklene i en trekant er alltid 180 grader.»

Elever på det første nivået vil ikke forstå forklaringen fordi de betrakter figurer som en helhet og tar derfor ikke hensyn til deler av figurer som vinkler (1.5). Derimot vil elever på det andre nivået ha forutsetning til å forstå forklaringen fordi de kan identifisere deler av figurer som vinkler (2.1). I videoen blir vinkelsummen til trekanten vist både ved å «legge vinklene inntil hverandre» (figur 4.3) og ved regning (figur 4.4). Samtidig viser Campus matte i et dynamisk geometriprogram at uansett hvordan vinklene i en trekant endres, vil vinkelsummen være den samme (figur 4.5). Dette tilsvarer å bruke empiriske metoder eller eksperimentering for å oppdage egenskaper til figurer (2.9), hvilket elever på det andre nivået kan.

I den første videoen i forelesningen i leksjonen «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer» blir ulike tredimensjonale figurer definert. Blant figurene som blir definert er et prisme (figur 4.6).

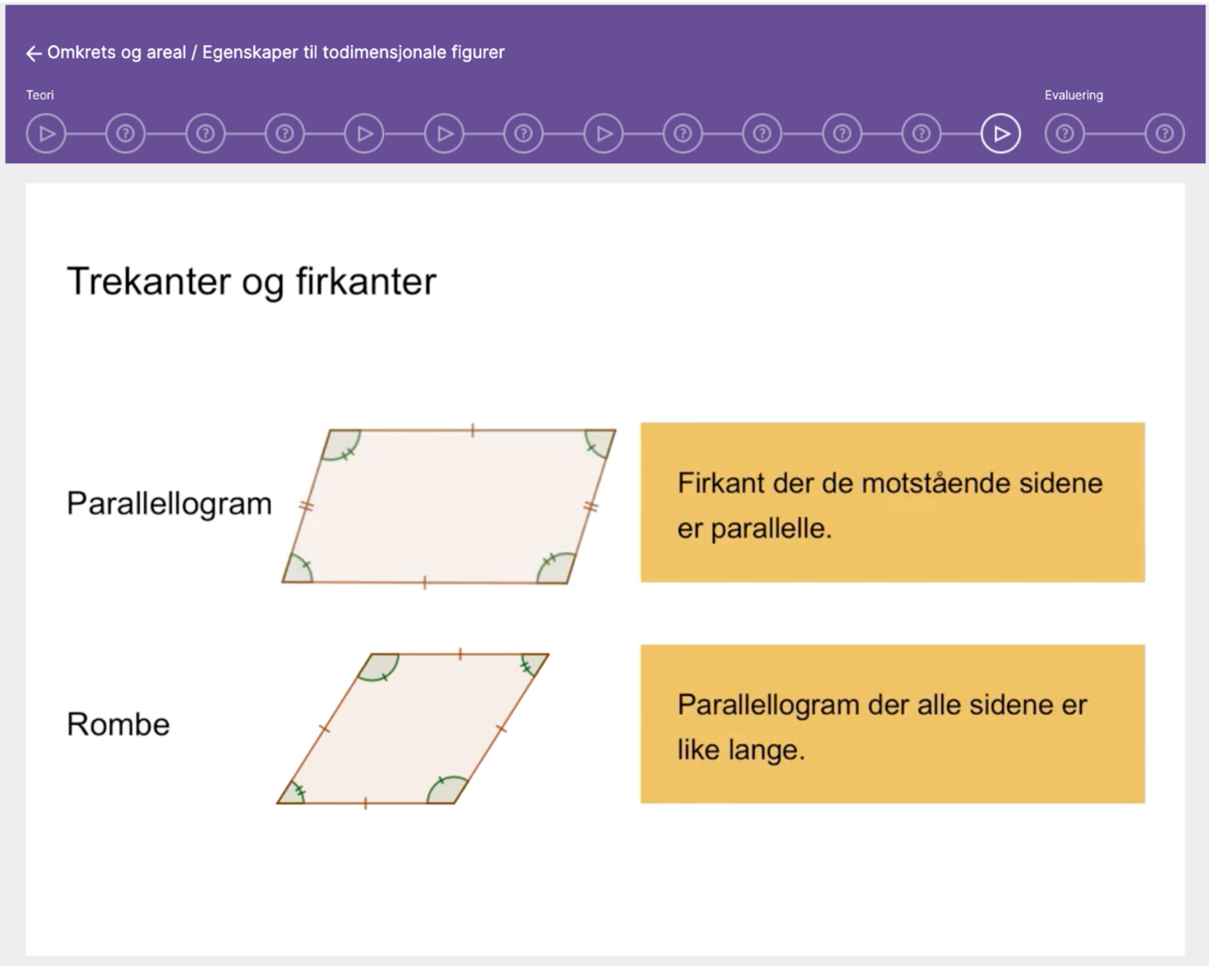


Figur 4.6. Skjermbilde av den første videoen i forelesningen i leksjonen som handler om egenskaper til tredimensjonale figurer.

Prismet blir definert slik: «Et prisme består av en eller annen type mangekant, som er grunnflaten og så har den en topp som tilsvarer bunnen. Og de to er endeflater. Så dette er et type prisme.». Elever på det første nivået vil ikke forstå definisjonen fordi de ikke tar hensyn til deler av eller egenskaper til figurer og de forstår ikke at egenskaper er nødvendige betingelser for en figur (1.5). Elever på det andre nivået derimot, kan identifisere deler av figurer og forstår at figurer bærer sine egenskaper (2.1). Videoen beskriver prismet på en uformell måte etter delene (flatene) i figuren. Det samme vil en elev på det andre nivået gjøre (2.5). Det betyr at elever på det andre nivået og høyere nivå vil forstå innholdet i denne delen av forelesningen.

4.1.3 Nivå 3: Forklaringer elever på det tredje nivået og høyere vil forstå

Forklaringene i denne delen er kategorisert som nivå 3. I den femte og siste videoen i forelesningen om egenskaper til todimensjonale figurer defineres ulike typer firkanter (figur 4.7).



Figur 4.7. Skjermbilde av den siste videoen i forelesningen i leksjonen «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer.»

Campus matte definerer romber slik: «Så har vi en spesiell type parallellogram der alle sidene er like lange, den type firkanter kaller vi for rombe.». Definisjonen som vises på skjermen, er «Parallellogram der alle sidene er like lange» (figur 4.7). Elever på nivå 2 vil avslå læreverkets definisjoner til fordel for sine egne beskrivelser (2.7). I deres definisjoner vil overflødig informasjon inkluderes i stedet for at de bestemmer tilstrekkelige kriterier (2.6). For eksempel kan elever på det andre nivået definere en rombe som «en skrå firkant der som har like lange sider». Campus matte definerer romber som en type parallellogram. Elever på det andre nivået vil ikke forstå at en geometrisk figur som en rombe, kan være en del av den større klassen parallellogram (2.8). Derfor vil ikke elever på det andre nivået ha forutsetning til å forstå definisjonen hvilket medfører at elever på det første nivået heller ikke vil det.

Elever på det tredje nivået derimot, vil forstå definisjonen fordi de forstår og bruker definisjoner av geometriske figurer (3.1). Samtidig forstår de at geometriske figurer kan være en del av en større klasse figurer (3.4). Derfor vil definisjonen være meningsfull for elever på nivå 3 og de vil forstå innholdet.

Ingen forklaringer fra videoer i leksjonen «2.1 egenskaper til tredimensjonale figurer» ble kategorisert i denne kategorien.

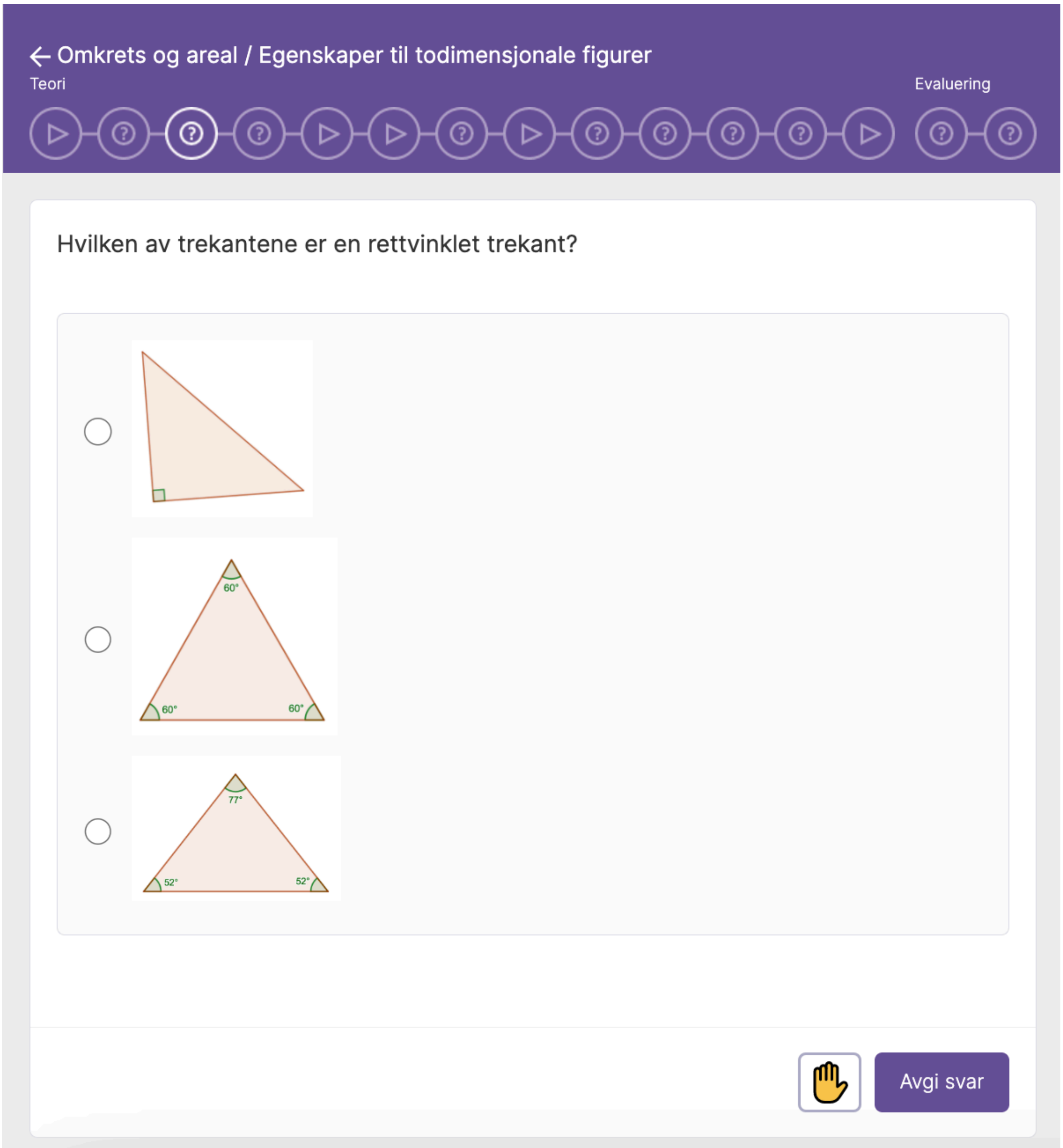
4.2 Analyse av kontrolloppgaver i forelesninger

I denne delen presenteres analysen av 2 av 13 analyserte oppgaver fra forelesningene. To kategorier ble identifisert; *nivå 1: oppgaver som kan løses av ved* geometrisk tenkning *tilhørende nivå 1 eller høyere* og *oppgaver uten mulighet til å avgi korrekt svar.*

4.2.1 Nivå 1: Oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 1 eller høyere

Egenskaper til todimensjonale figurer

Oppgaven som analyseres under er den andre oppgaven i forelesningen om egenskaper til todimensjonale figurer (figur 4.8).



Figur 4.8. Skjermbilde av den andre oppgaven i forelesningen om egenskaper til todimensjonale figurer.

Beskrivelse av oppgaven

Oppgaven er en flervalgsoppgave som ber eleven om å bestemme hvilken av de tre trekantene som er rettvinklet.

Løsningsforslag

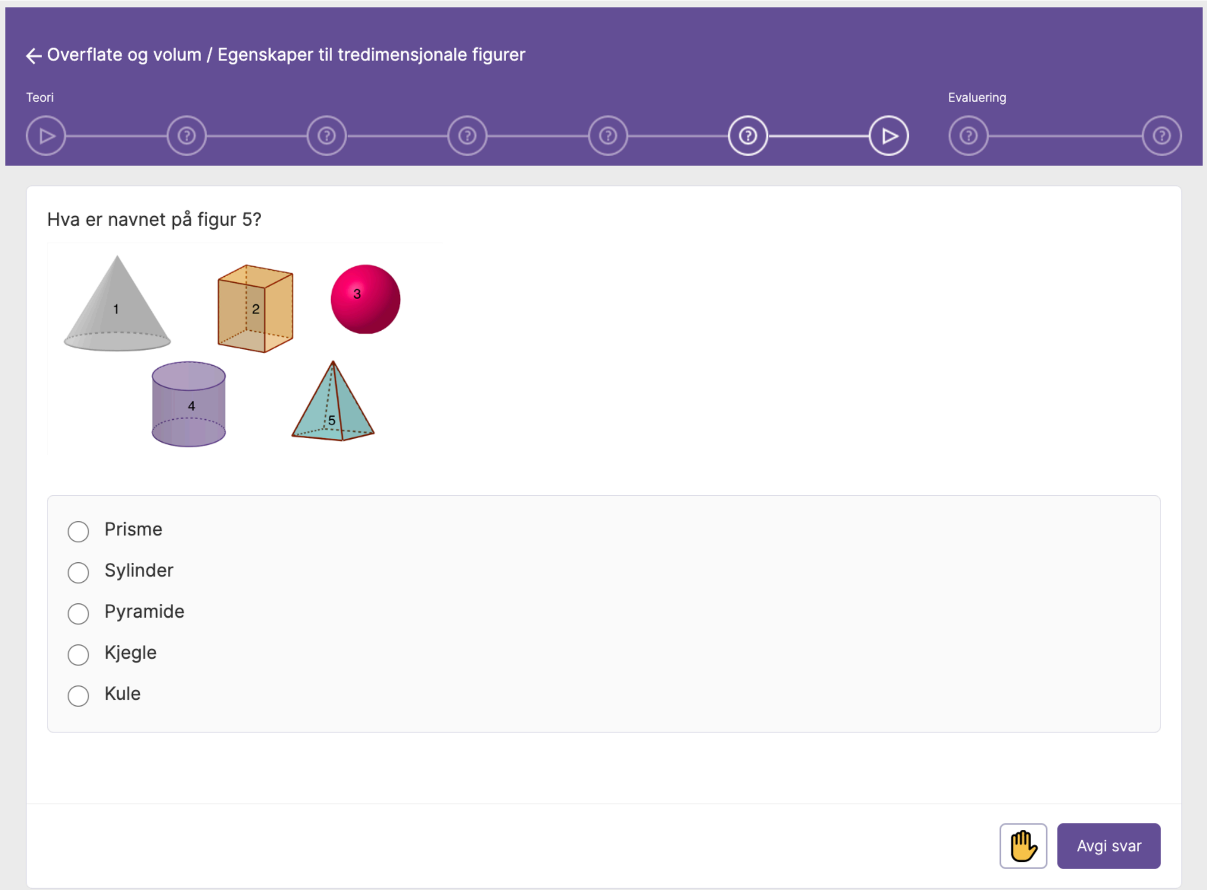
Den øverste trekanten er rettvinklet.

Begrunnelse for kategorisering

Elever på det første nivået vil klare oppgaven fordi de kan kjenne igjen og navngi figurer dersom de ligner på prototypen av figuren (1.1). En prototype av rettvinklede trekanter blir vist i figur 3.1. Den rettvinklede trekanten i oppgaven er ikke rotert nok til at den ikke lengre ligner på prototypen. Ingen av de andre trekantene i svaralternativene ligner på prototypen av en rettvinklet trekant. Derfor vil en elev på det første nivået klare oppgaven.

Tredimensjonale figurer

Oppgaven som analyseres under er den femte og siste oppgaven i forelesningen om egenskaper til tredimensjonale figurer (figur 4.9).



Figur 4.9. Skjermbilde av den femte oppgaven i forelesningen om egenskaper til tredimensjonale figurer.

Beskrivelse av oppgaven

Oppgaven er en flervalgsoppgave som viser fem ulike nummererte tredimensjonale figurer. Eleven skal velge riktig navn av alternativene som passer til den femte figuren.

Løsningsforslag

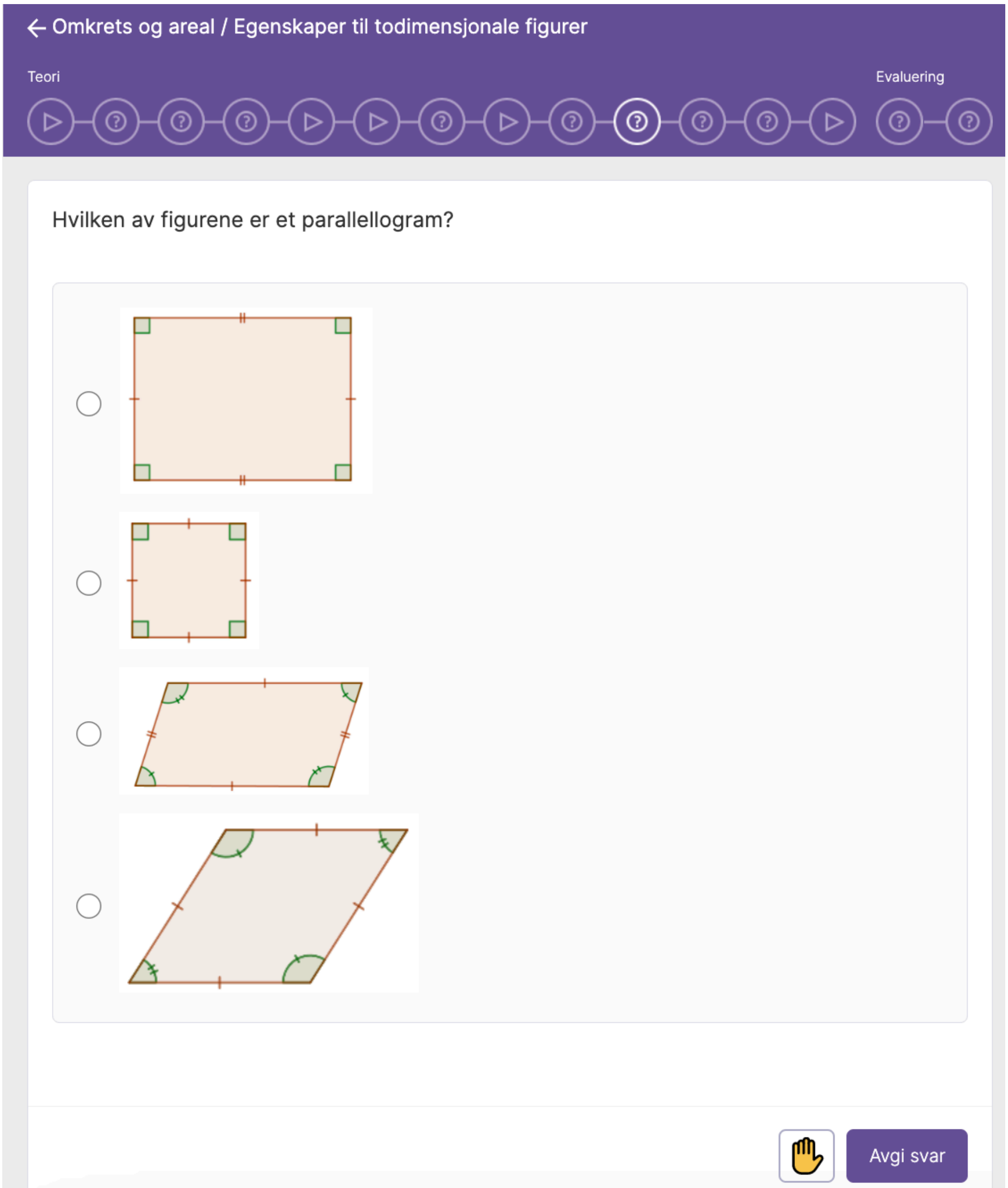
Figur 5 er en pyramide.

Begrunnelse for kategorisering

Elever på det første nivået vil klare oppgaven fordi pyramiden ligner på prototypen av pyramider (figur 3.5). Det betyr at eleven vil kjenne igjen og navngi pyramiden (1.1). Samtidig ligner ingen av de andre figurene i oppgaven på prototypen og dermed vil ikke elever på det første nivået avgi feil svar.

4.2.2 Oppgaver uten mulighet til å avgi korrekt svar

Av oppgavene i denne kategorien ble samtlige identifisert i forelesningen om egenskaper til todimensjonale figurer. På neste side analyseres en av dem (figur 4.10).



Figur 4.10. Skjermbilde av den sjette oppgaven i forelesningen om todimensjonale figurer.

Beskrivelse av oppgaven

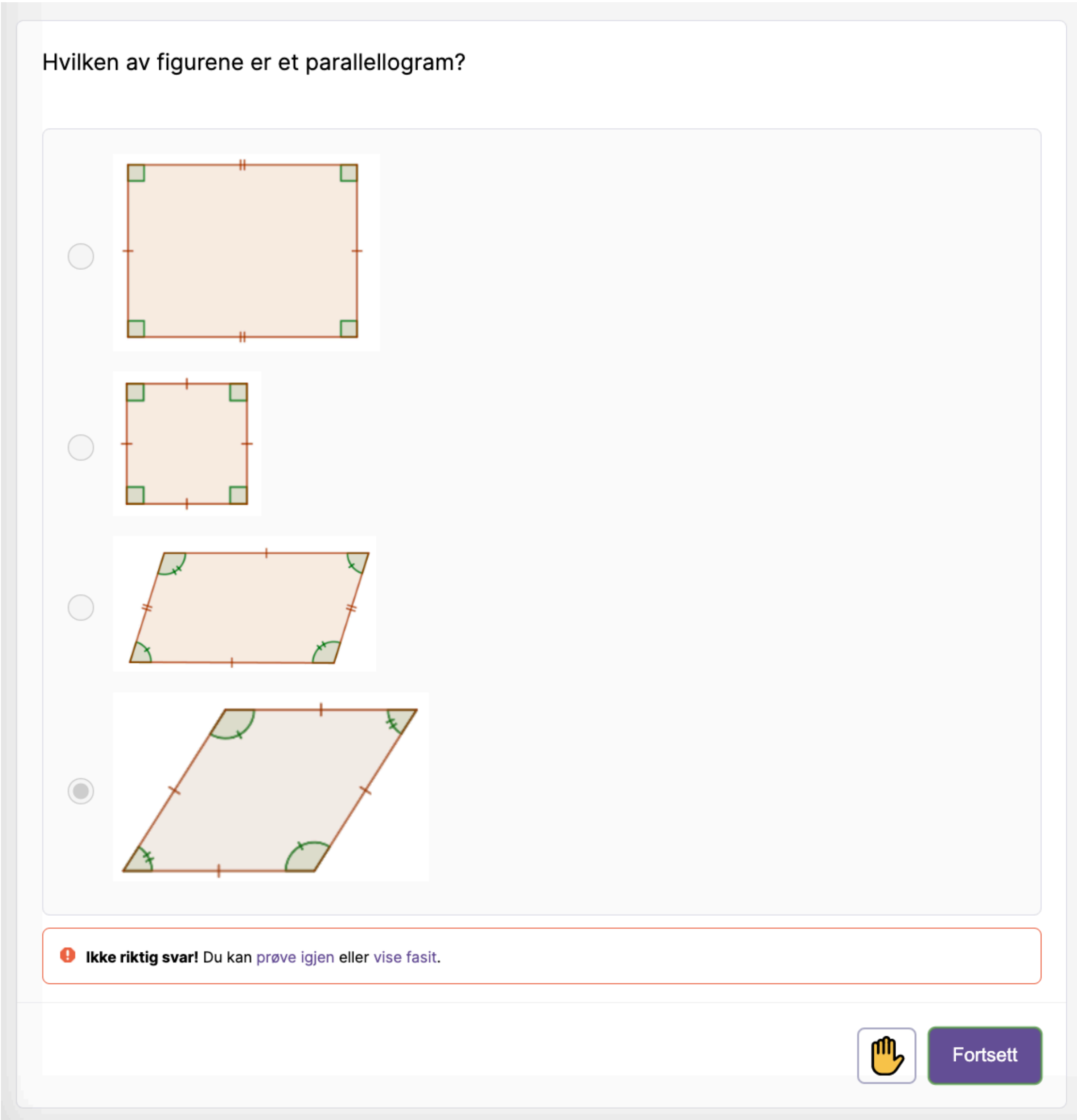
Oppgaven er en flervalgsoppgave som ber elever velge hvilken av figurene i svaralternativene som er et parallellogram. Det går kun an å velge et svar.

Løsningsforslag

Et parallellogram er en firkant som har parvis parallelle sider. Det har alle figurene i svaralternativene og alle alternativer er derfor riktig.

Kategorisering

Løsningsforslaget mitt tilsvarer tenking på det tredje nivået fordi det viser forståelse og bruk av definisjoner med tilstrekkelige betingelser (3.1). Det viser også forståelse for at en geometrisk figur kan være en del av en større klasse figurer (3.4) som at et rektangel er et parallellogram. Selv om løsningsforslaget er korrekt, tillater ikke Campe Matte å velge flere alternativer enn ett. Man vil bare få respons om at svaret er riktig dersom man velger den tredje figuren (telt ovenfra). Det er dermed ikke mulig å avgi korrekt svar på oppgaven. Figur 4.11 viser responsen eleven får dersom den velger den nederste figuren.



Figur 4.11. Respons fra Campus hvis man velger at romben er et parallellogram.

4.3 Analyse av oppgavesamling

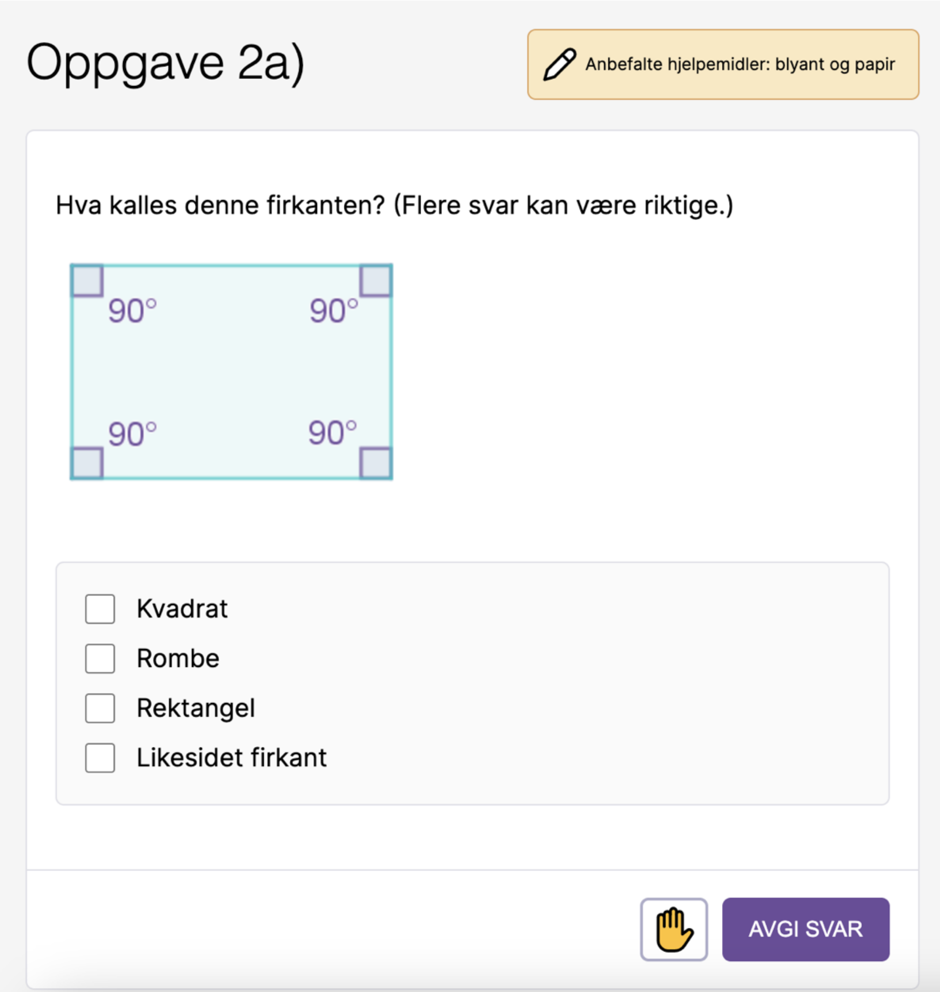
I denne delen presenteres analysen av oppgaver innenfor kategorier som tilsvarer hvert nivå av van Hiele-teorien fra nivå 1 til nivå 3 samt oppgaver som er plassert mellom nivåene. Innenfor hver kategori vil jeg analysere en oppgave hentet fra kapittel «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer» og en fra kapittel «2.2. Egenskaper til tredimensjonale figurer» på Campus Matte 9. Hver oppgave vil vises med skjermbilde, beskrivelse, løsningsforslag og begrunnelse for kategorisering.

4.3.1 Nivå 1:Oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 1 eller høyere.

Av 44 analyserte oppgaver ble 6 kategorisert i som oppgaver som kan løses ved tenkning tilhørende nivå 1 eller høyere. 3 av oppgavene er fra oppgavesamlingen i emnet *egenskaper til todimensjonale figurer* og 3 av oppgavene er fra oppgavesamlingen i emnet *egenskaper til tredimensjonale figurer*. I dette delkapitlet vil jeg presentere analyse av to oppgaver; én fra hvert emne.

Todimensjonale figurer

Oppgaven som analyseres er fra grønn løype (figur 4.12).



Figur 4.12. Skjermbilde av oppgave 2a) i oppgavesamlingen i leksjonen om egenskaper til todimensjonale figurer.

Beskrivelse av oppgaven

I denne oppgaven må elever velge riktig typenavn til firkanten. Firkanten er illustrert og vinkelstørrelsene er oppgitt på figuren. Oppgaven er en flervalgsoppgave, og i oppgaveteksten blir det opplyst om at flere svar kan være riktige. Eleven kan velge mellom fire ulike svaralternativ; kvadrat, rombe, rektangel og likesidet firkant. Anbefalte hjelpemidler er blyant og papir.

Løsningsforslag

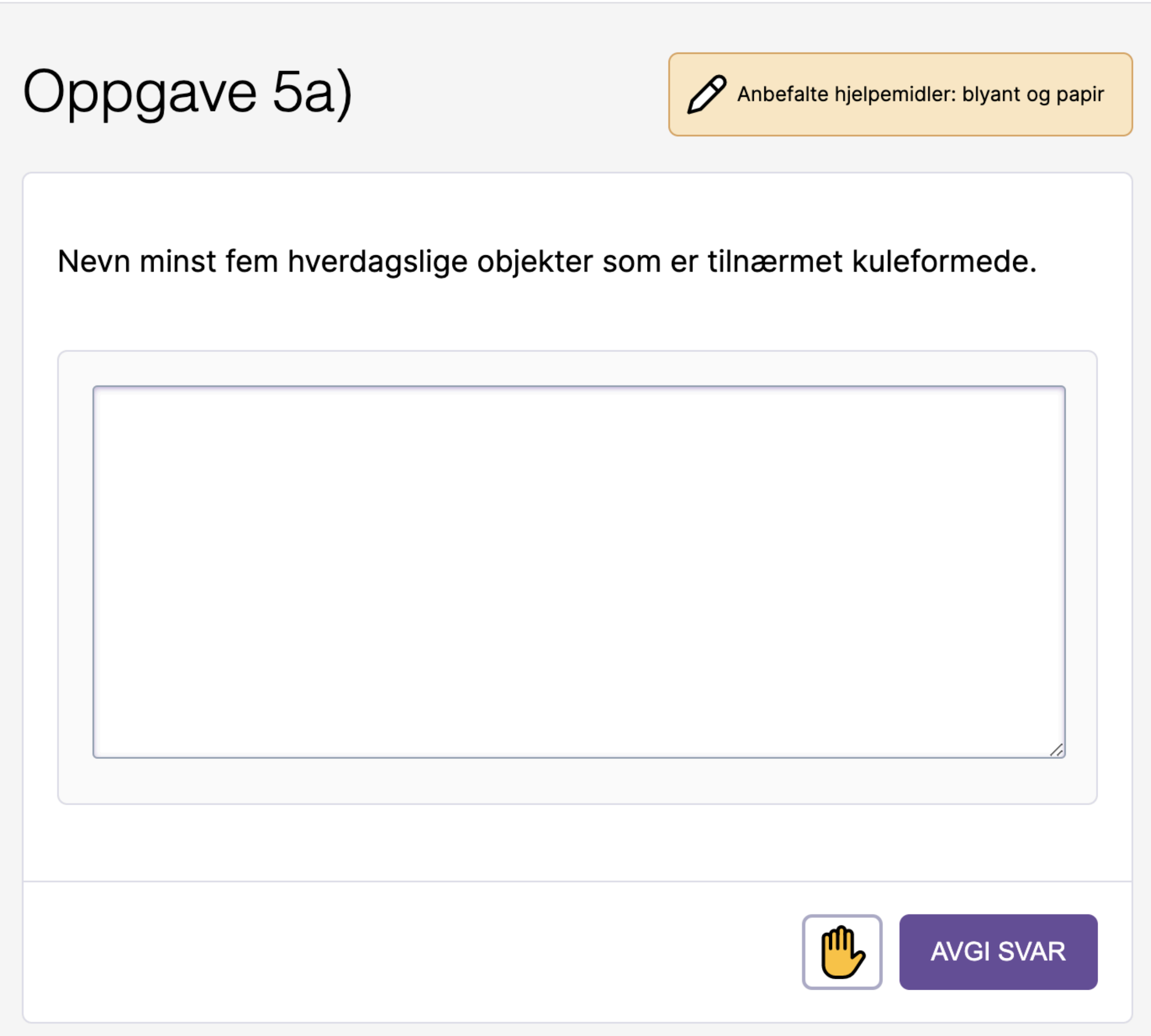
Oppgaven kan løses med ulike tenkemåter. Jeg velger å vise et eksempel på det jeg vurderer som den enkleste tenkemåten det går an å løse oppgaven med uten gjetning: «den ser ut som et rektangel, men ikke som et kvadrat, en rombe eller en likesidet firkant. Derfor må den være et rektangel.».

Begrunnelse for kategorisering

Denne oppgaven er kategorisert som nivå 1. Elever som tenker på det første nivået vil klare oppgaven fordi rektangelet ligner på prototypen av rektangler (figur 3.3) Det medfører at elever på det første nivået har forutsetning til å kjenne igjen og navngi rektangelet korrekt (1.1)

Tredimensjonale figurer

Oppgaven som analyseres under er fra rød løype (figur 4.13).



Figur 4.13. Skjermbilde av oppgave 5a) i oppgavesamlingen i leksjonen om egenskaper til tredimensjonale figurer.

Beskrivelse av oppgave

Oppgaven er en tekstoppgave som ber om at eleven skal nevne minst fem hverdagslige objekter som er tilnærmet kuleformede. Anbefalte hjelpemidler er blyant og papir.

Løsningsforslag

Fotball, globus, julekule, appelsin, sprettball og perler.

Begrunnelse for kategorisering

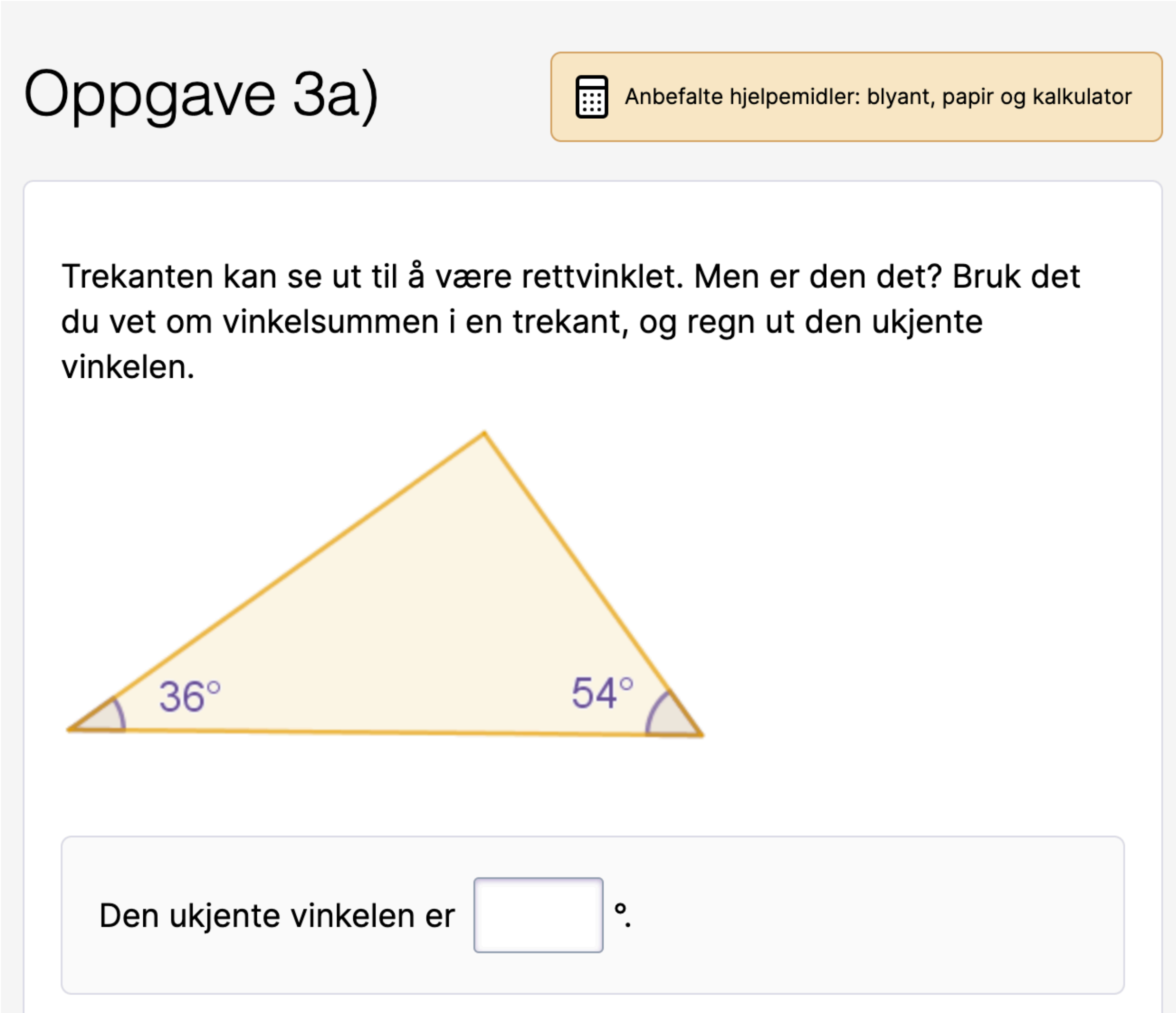
Oppgaven er kategorisert som nivå 1. Det kreves at eleven kjenner til kuleformen, hvilket elever på det første nivået kan (1.1). Oppgaven kan løses ved visualisering og dermed med «det ser ut som ...»-tenkning (1.1). For eksempel kan eleven tenke slik: «en fotball ser ut som en kule». Dermed kan oppgaven løses med geometrisk tenkning som kjennetegner nivå 1.

4.3.2 Nivå 2: Oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 2 eller høyere.

23 oppgaver ble kategorisert som *oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 2 eller høyere*. 11 av oppgavene er fra emnet egenskaper til todimensjonale figurer, mens 12 oppgaver er fra emnet egenskaper til tredimensjonale figurer.

Todimensjonale figurer

Oppgaven som analyseres er fra rød løype (figur 4.14).



Figur 4.14. Skjermbilde av oppgave 3a) i oppgavesamlingen i leksjonen om egenskaper til todimensjonale figurer.

Beskrivelse av oppgaven

I denne oppgaven får man se en illustrasjon av en figur som kan ligne på en rettvinklet trekant hvor man får vite størrelsen på de to minste vinklene. Oppgaven sier at man skal bruke det man vet om vinkelsum i trekanter for å regne ut den ukjente vinkelen. Samtidig sier oppgaven implisitt at man kan bruke den ukjente vinkelen til å bestemme om trekanten er rettvinklet. Anbefalte hjelpemidler er blyant, papir og kalkulator. Svaret skal skrives inn i den hvite ruten.

Løsningsforslag

Jeg kaller den ukjente vinkelen $\angle x$. Vinkelsummen i trekanter er 180 grader. Det gir at $\angle x = 180° - 36° - 54°$**.** Jeg bruker kalkulator som anbefalt og får at $\angle x = 90°$. Fordi en av vinklene i trekanten er 90°, er trekanten rettvinklet.

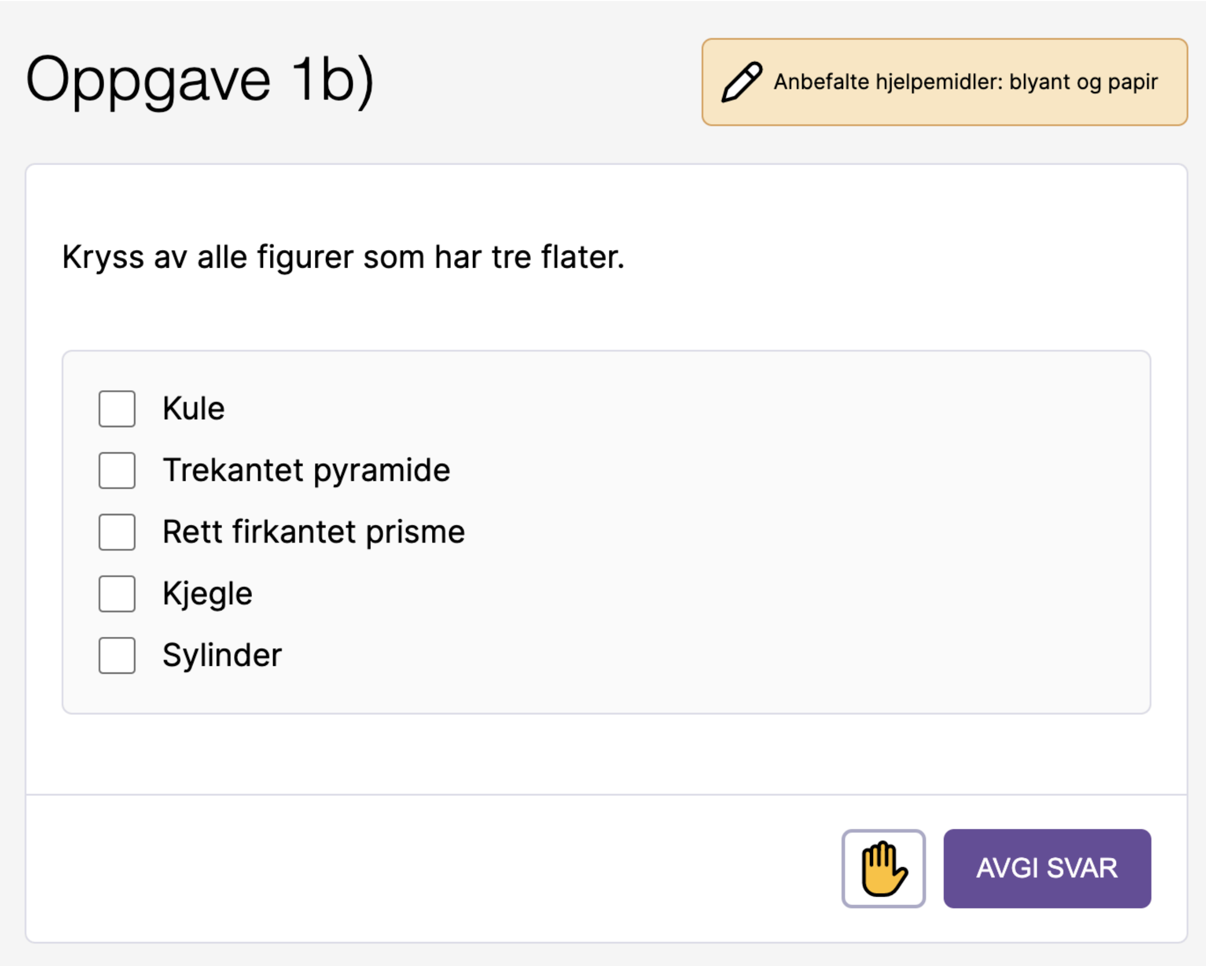
Begrunnelse for kategorisering

Oppgaven er kategorisert som nivå 2. Elever på det første nivået vil ikke klare oppgaven i henhold til flere av nivåindikatorene til nivå 1. For det første er trekanten orientert på en måte som gjør at elever på det første nivået ikke vil kjenne den igjen som en rettvinklet trekant (1.4). Dette fører til at elever ikke kan bruke «det ser ut som ...»-tenkning til å løse oppgaven fordi den ikke ligner på prototypen av rettvinklede trekanter (figur 3.1). De vil dermed ikke kunne kjenne igjen eller navngi trekanten som en rettvinklet trekant (1.1). For det andre må elever kjenne til egenskapene til vinklene i rettvinklede trekanter, noe elever på det første nivået ikke kan fordi de betrakter figurer som en helhet (1.5).

Elever på nivå 2 forstår at figurer bærer sine egenskaper (2.1) og kan bruke egenskaper til deler av figurer i oppgavesituasjoner (2.2.). Det betyr at elever på det andre nivået kan noen grunnleggende egenskaper til figurer, slik som at rettvinklede trekanter har en vinkel som er 90 grader. Oppgaven krever ikke at elevene må ta hensyn til mer enn én egenskap (vinkler), hvilket betyr at elever på nivå 2 har forutsetninger for å klare oppgaven (2.3). For å ta stilling til om trekanten er rettvinklet må eleven regne ut den ukjente vinkelen, som er en empirisk metode, noe en elev på det andre nivået kan (2.9). Ingen av nivåindikatorene på nivå 3 kreves for å løse oppgaven, hvilket betyr at en elev må være på minimum nivå 2 for å løse oppgaven.

Tredimensjonale figurer

Oppgaven som analyseres er fra grønn løype (figur 4.15).



Figur 4.15. Skjermbilde av oppgave 1b) i oppgavesamlingen i leksjonen om egenskaper til tredimensjonale figurer.

Beskrivelse av oppgaven

I denne flervalgsoppgaven må eleven velge ut hvilke av fem tredimensjonale figurer som har tre flater. Figurene eleven må ta stilling til er kule, trekantet pyramide, rett firkantet prisme, kjegle og sylinder. Anbefalte hjelpemidler er blyant og papir.

Løsningsforslag

Kuler har én flate. Trekantede pyramider har fire flater. Rette firkantede prismer har seks flater. Kjegler har to flater. Sylindrer har tre flater. Derfor er sylinder det eneste riktige svaret.

Begrunnelse for kategorisering

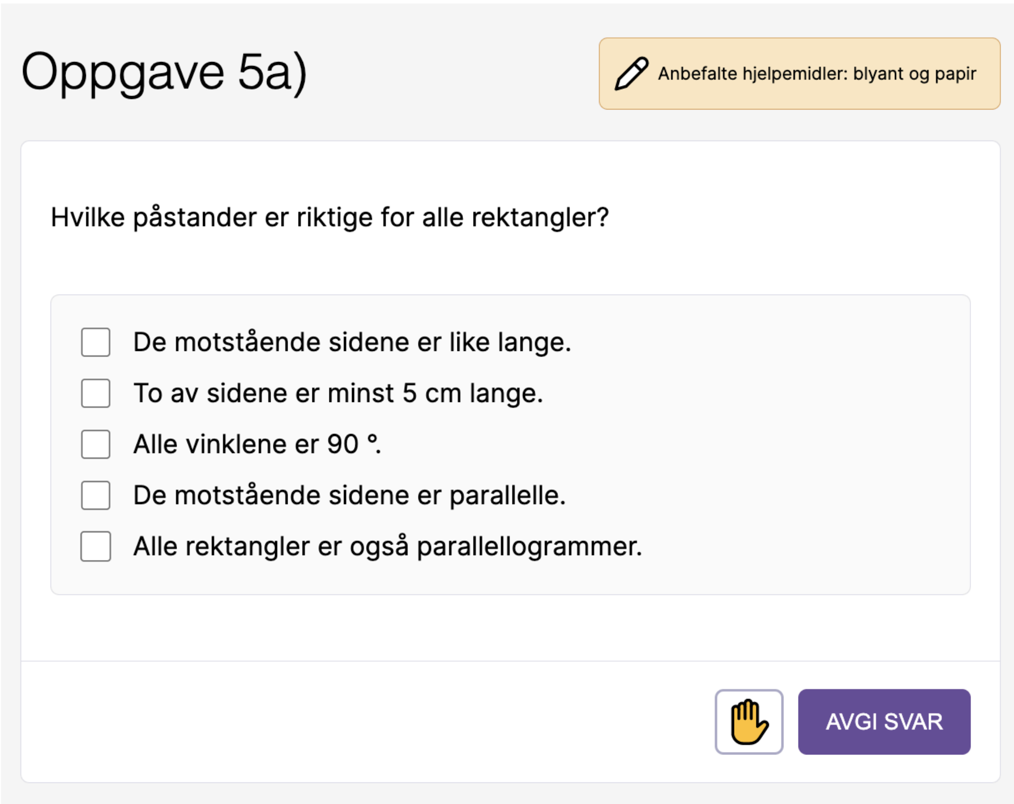
Denne oppgaven er kategorisert som nivå 2. Elever på det første nivået kan ikke klare oppgaven fordi de ikke evner å ta hensyn til deler av figurer som flater (1.5). På det andre nivået, derimot, kan elever identifisere deler av figurer slik som flater og forstår av figurer bærer sine egenskaper (2.1). Elever kan bruke empiriske metoder til å undersøke hvor mange flater de ulike figurene har (2.9), for eksempel gjennom observasjon av tegninger eller dynamiske geometriprogram. Derfor vil elever på nivå 2 og høyere klare oppgaven.

4.3.3 Nivå 3: Oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 3 eller høyere.

13 oppgaver ble kategorisert som *oppgaver som kan løses ved geometrisk tenkning tilhørende nivå 3 eller høyere.* Samtlige av oppgavene i denne kategorien er fra emnet *egenskaper til todimensjonale figurer*.

Todimensjonale figurer

Oppgaven som analyseres er fra rød løype (figur 4.16).



Figur 4.16. Skjermbilde av oppgave 5a) i oppgavesamlingen i leksjonen om egenskaper til todimensjonale figurer.

Beskrivelse av oppgave

Oppgaven er en flervalgsoppgave som presenterer fem påstander om rektangler. Eleven må velge hvilke av påstandene som stemmer for alle rektangler ved å krysse av på de påstandene den mener er riktig. Påstandene er (1) de motstående sidene er like lange, (2) to av sidene er minst 5 cm lange, (3) alle vinklene er 90°, (4) de motstående sidene er parallelle og (5) alle rektangler er også parallellogrammer. Deretter må eleven trykke «avgi svar». Anbefalte hjelpemidler er blyant og papir.

Løsningsforslag

De motstående sidene i et rektangel er like lange fordi definisjonen av rektangler er at det er en firkant hvor alle vinklene er 90 grader. Dette medfører at motstående sider må være like lange og den første påstanden er derfor riktig. Den andre påstanden er feil fordi sidelengdene i et rektangel kan være hvilken som helst lengde så lenge alle vinklene er 90 grader. Den tredje påstanden er riktig fordi at vinklene er 90 grader er en nødvendig egenskap som gjelder alle rektangler. De motstående sidene i rektangler må være parallelle fordi vinklene er 90 grader og derfor er den fjerde påstanden riktig. Fordi motstående sider må være parallelle i rektangler, er rektangler også parallellogrammer. Det betyr at den femte påstanden må være riktig.

Begrunnelse for kategorisering

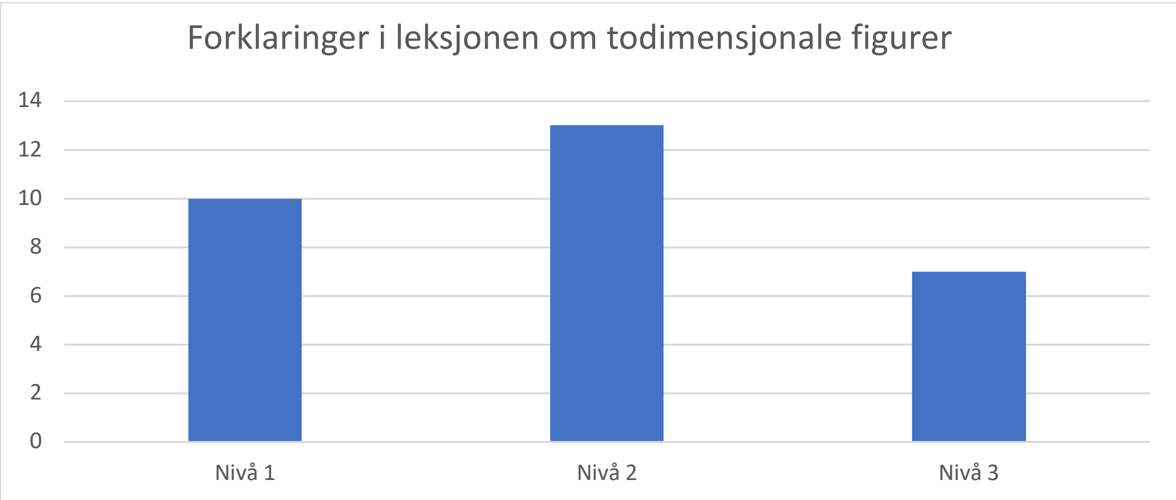
Oppgaven er kategorisert som nivå 3. Alle påstandene krever at eleven tar hensyn til egenskapene til rektangler. Elever som tenker på nivå 1 betrakter figurer som en helhet og tar dermed ikke hensyn til deler av eller egenskaper til figurer (1.5). Derfor vil ikke elever på nivå 1 klare oppgaven. Elever på det andre nivået vil kunne svare riktig på flere av påstandene, men ikke den femte som krever at eleven forstår at rektangler er parallellogram. Dette forstår ikke elever på det andre nivået fordi de ikke forstår at typer figurer som rektangler kan være en del av en større klasse figurer som parallellogram (2.8). Elever på det tredje nivået forstår at rektangler er parallellogrammer (3.4) og forstår og bruker definisjoner av geometriske figurer (3.1). Derfor vil elever på nivå 3 løse klare oppgaven gjennom tenkning lignende løsningsforslaget.

4.4 Antall forekomster av de ulike nivåene

I denne delen presenteres og fremstilles resultatene fra analysen. For enkelhetens skyld vil jeg referere til kategoriene med innhold som kunne tildeles et nivå som nivå 1, nivå 2 og nivå 3. At en forklaring er tildelt eksempelvis nivå 1, betyr at en elev som tenker på nivå 1 eller høyere vil forstå forklaringen. Kontrollspørsmål eller oppgaver som er tildelt et nivå, betyr at elever som tenker på det aktuelle nivået eller høyere med sikkerhet kan svare riktig på oppgaven ifølge analyseverktøyet. Innhold som ikke kunne analyseres fra videoene, vil ikke bli fremstilt eller kommentert. Kontrollspørsmål og oppgaver som ikke kunne tildeles et nivå vil bli fremstilt og kommentert.

4.4.1 Forekomst av de ulike nivåene i forelesninger

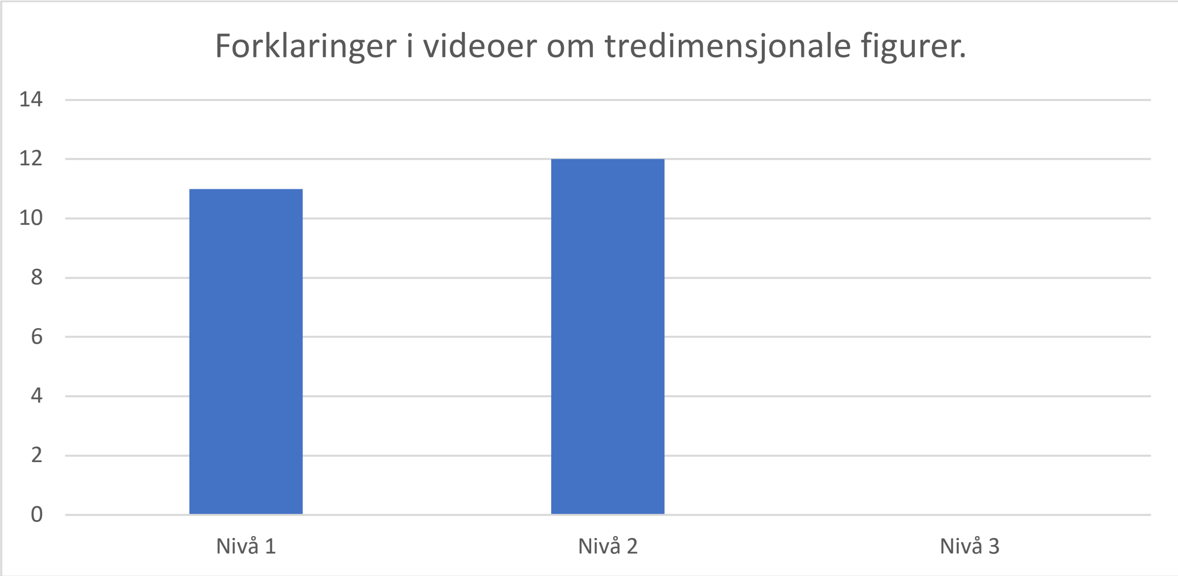
I figur 4.17 presenteres antall forklaringer fra videoene i leksjonen «2.1 Egenskaper til todimensjonale figurer» som krever at elever tenker på det første, andre og tredje nivået.



Figur 4.17. Forekomst av nivå 1, 2 og 3 i forklaringer om todimensjonale figurer. N=30.

I figur 4.17 ser jeg at elever på nivå 1 kan forstå en tredjedel av forklaringene i videoene. 43% av videoene må eleven tenke på minimum det andre nivået for å forstå. Til sammen (nivå 1+2) kan en elev på det andre nivået forstå 77% av forklaringer. Resterende forklaringer krever at eleven tenker på det tredje nivået for å forstå det. Det vil si at 23% av forklaringene i videoene krever at eleven tenker på nivå 3. For å forstå alt i alle videoene i forelesningen må dermed eleven tenke på minimum nivå 3.

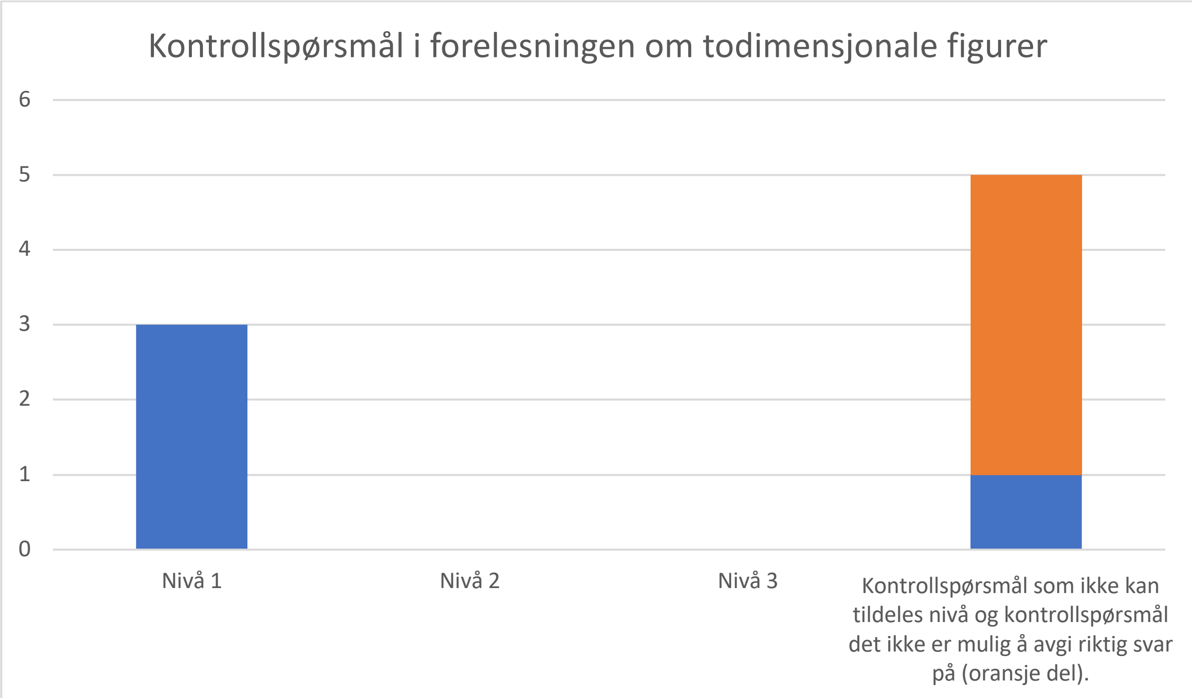
Antall forklaringer elever på de ulike nivåene kan forstå i videoene i leksjonen «2.2 Egenskaper til tredimensjonale figurer», er illustrert i figur 4.18.



Figur 4.18. Forekomst av nivå 1, 2 og 3 i forklaringer om tredimensjonale figurer. N=23.

I leksjonen om tredimensjonale figurer kan elever på det første nivået forstå omtrent halvparten (11 av 23) av forklaringene i videoene, som illustrert i figur 4.18. Fordi det ikke forekom noen forklaringer som krevde at elever tenker på nivå 3, kan alle forklaringene forstås av elever på nivå 2. Dette betyr at elever på nivå 3 også kan forstå alt.

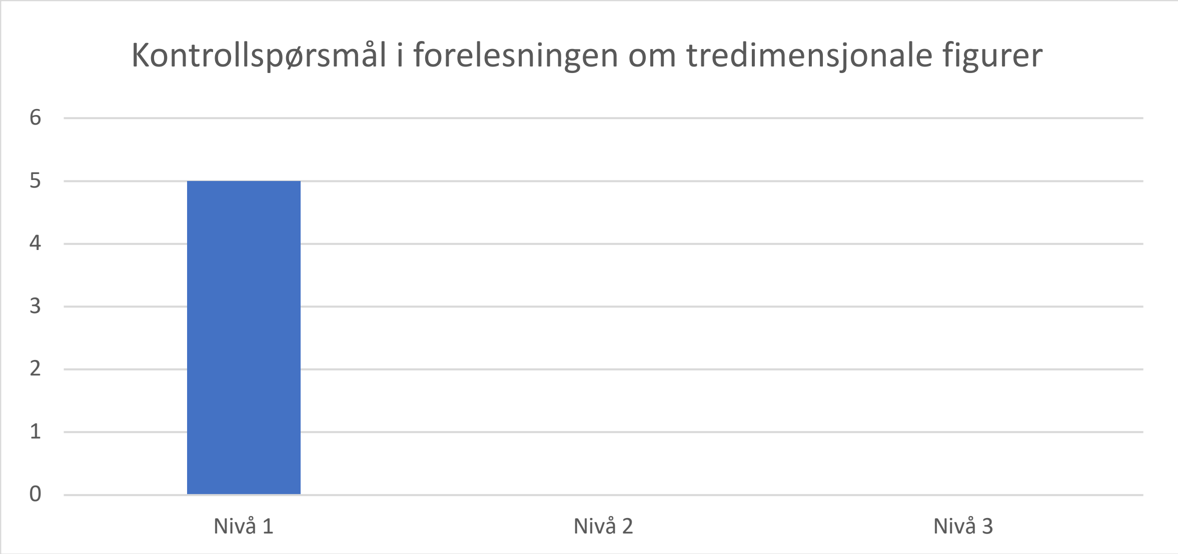
Figur 4.20 viser hvor mange av kontrollspørsmålene i forelesningen «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer» elever på de ulike nivåene har forutsetninger for å løse. I tillegg viser figuren antall kontrollspørsmål som ikke kunne tildeles nivå samt kontrollspørsmål det ikke er mulig å avgi korrekt svar på.



Figur 4.19. Forekomst av de ulike nivåene i kontrollspørsmålene og kontrollspørsmål som ikke kan tildeles nivå i leksjonen om todimensjonale figurer. Den oransje delen representerer kontrollspørsmål uten mulighet til å avgi korrekt svar. N=8.

Som illustrert i figur 4.19, var det ikke mulig å tildele nivå til 5 av 8 (62,5%) kontrollspørsmål i leksjonen om todimensjonale figurer. 4 av disse kontrollspørsmålene består av oppgaver det ikke er mulig å avgi korrekt svar på. I tillegg krever ikke et av kontrollspørsmålene geometrisk tenkning for å løses og det kunne derfor ikke tildeles et nivå. Av de 3 kontrollspørsmålene som kunne tildeles nivå, kan alle løses av elever på det første nivået. Dette betyr at alle elever på alle nivåer av geometrisk tenkning kan svare riktig på dem.

Antall kontrollspørsmål som kan løses på de ulike nivåene i forelesningen i leksjonen «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer» fremstilles i figur 4.20.

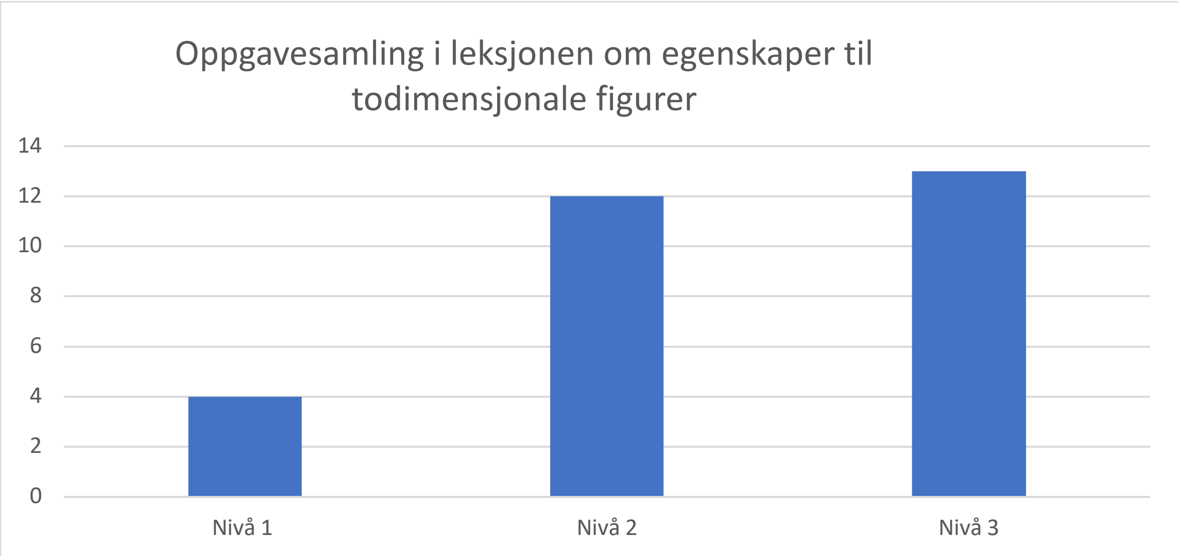


Figur 4.20. Forekomst av de ulike nivåene i kontrollspørsmålene i leksjonen om tredimensjonale figurer. N=5.

Som man kan se av figur 4.20, krevde ingen av kontrollspørsmålene at elever tenker på nivå 2 eller 3 for å svare riktig. Samtlige (5 av 5) kontrollspørsmål kan løses av elever på nivå 1.

4.4.2 Forekomst av de ulike nivåene i oppgavesamlinger

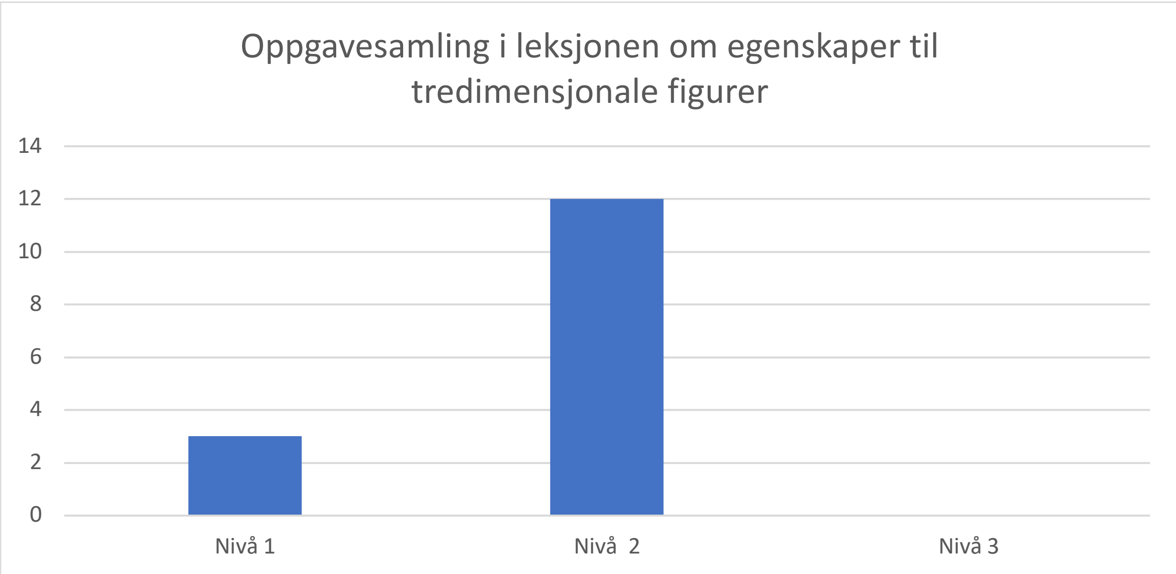
Figur 4.21 illustrerer antall oppgaver fra oppgavesamlingen i leksjonen «2.1 Egenskaper til todimensjonale figurer» som kan løses av elever på hvert av de tre nivåene eller høyere nivå.



Figur 4.21. Forekomst av de ulike nivåene i oppgavesamlingen om egenskaper til todimensjonale figurer. N=29.

Som figur 4.21 viser, kan elever på det første nivået kun løse en liten andel av oppgavene, 4 av 29 hvilket tilsvarer 14%. Videre kan 12 av oppgavene (41%) ifølge analyseverktøyet løses av elever på minimum nivå 2. Til sammen har elever på nivå 2 forutsetninger til å løse 55% av oppgavene i oppgavesamlingen. Til slutt viser figur 4.21 at antall oppgaver som ikke kan løses av elever på det første eller andre nivået, men av elever på det tredje nivået er 13 av 29. Dette tilsvarer omtrent 45% av oppgavene. Alle oppgavene kunne tildeles et nivå fra 1 til 3, som betyr at elever som tenker på nivå 3 har forutsetninger til å kunne svare riktig på alle oppgavene i leksjonen.

Figur 4.22 viser forekomst av de ulike nivåene i oppgavesamlingen i leksjonen «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer».

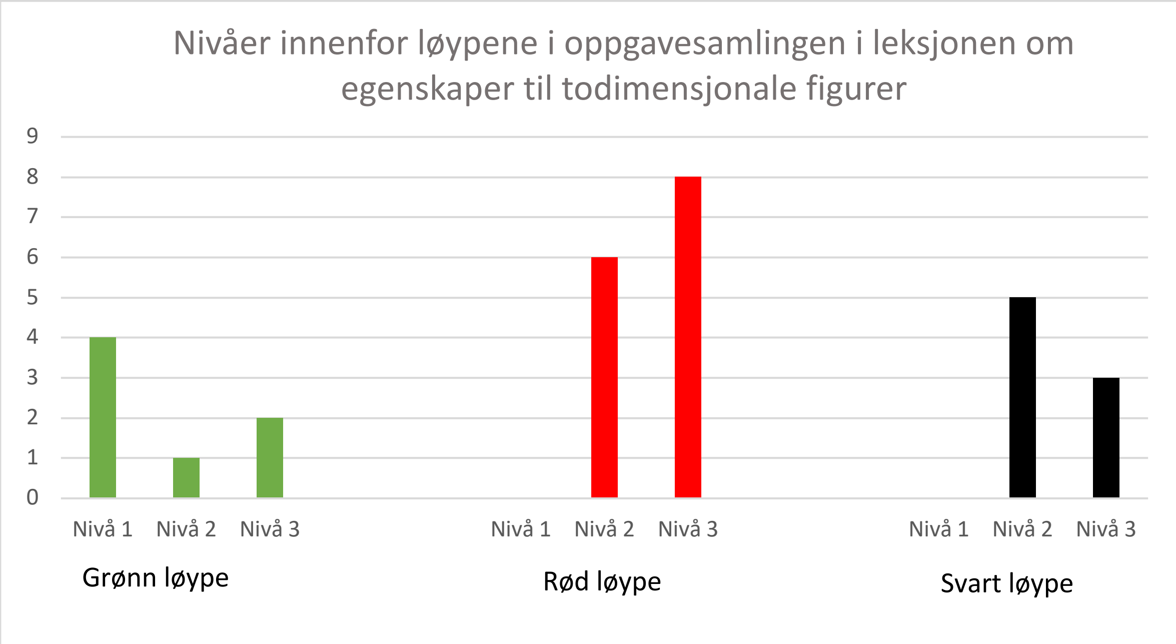


Figur 4.22. Forekomst av de ulike nivåene i oppgavesamlingen om egenskaper til tredimensjonale figurer. N=15.

Som figur 4.22 illustrerer, kan 3 av 15 oppgavene i oppgavesamlingen (20%) løses av elever på det første nivået eller høyere. De resterende 12 oppgavene kan løses av elever på det andre nivået eller høyere, hvilket tilsvarer 80% av oppgavene. Fordi ingen av oppgavene krever at eleven tenker på det tredje nivået for å løses, kan alle oppgavene løses av elever på det andre nivået.

Figur 4.23 viser antall oppgaver på de ulike nivåene av geometrisk tenkning innenfor hver løype eller vanskelighetsgrad (grønn, rød og svart) i oppgavesamlingen i leksjonen «2.1

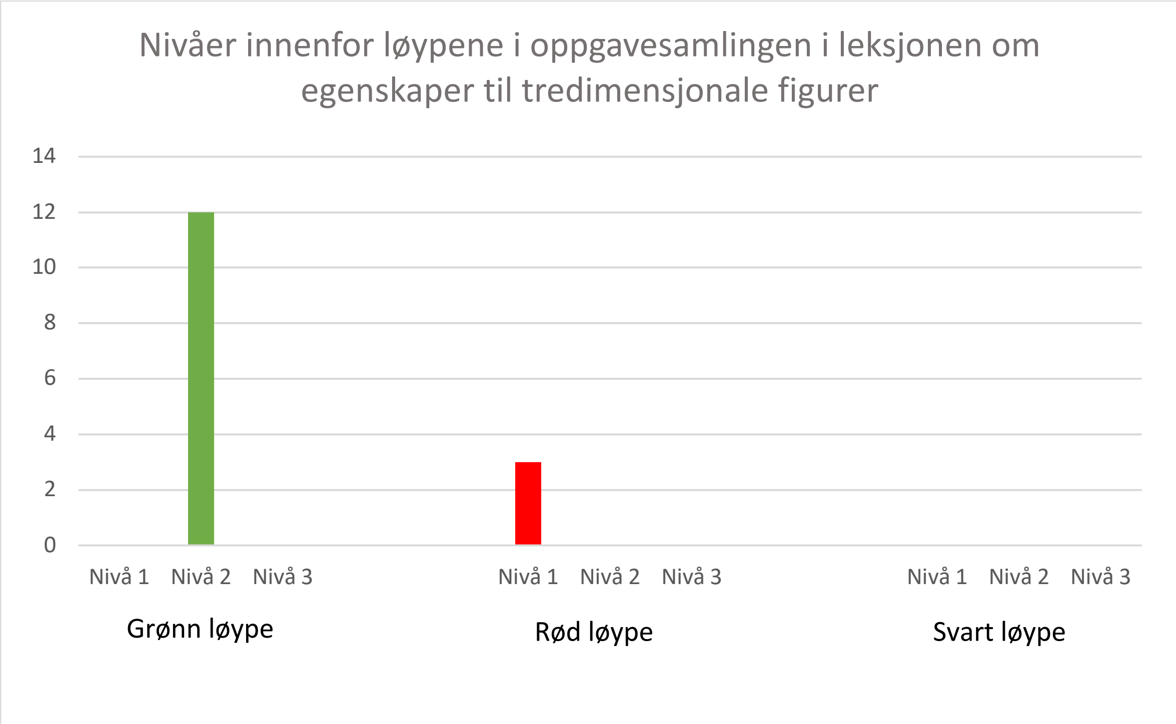
Egenskaper til todimensjonale figurer».



Figur 4.23. Forekomst av de ulike nivåene innenfor grønn, rød og svart løype i oppgavesamlingen i leksjonen om egenskaper til tredimensjonale figurer. N=7, 14 og 8.

Grønn løype skal tilsvare de letteste oppgavene i oppgavesamlingene på Campus Matte. Som illustrert i figur 4.23, kan 4 av 7 oppgaver i grønn løype løses av elever på det første nivået. Videre viser figuren at én oppgave kan løses av elever på det andre nivået eller høyere. Til slutt kan man se at 2 av oppgavene verken kan løses av elever på det første eller andre nivået, men av elever på nivå 3. Dette er et interessant funn fordi det er et stort hopp i hvilke nivå av geometrisk tenkning som kreves innenfor de letteste oppgavene som tilbys av læreverket. Rød løype skal bestå av oppgaver med middels vanskelighetsgrad. Ingen av oppgavene kan løses av elever som tenker på det første nivået. 6 av 14 oppgaver kan løses av elever på det andre nivået eller høyere (43%). De resterende 8 oppgavene kan løses av elever som tenker på nivå 3 (57%). Det vil si at de fleste oppgavene innenfor rød løype krever nivå 3 av geometrisk tenkning for å løses. Svart løype skal bestå av de vanskeligste oppgavene i oppgavesamlingen. Innenfor svart løype kan 5 av 8 oppgaver løses av elever som det tenker på det andre nivået og høyere (62,5%), mens 3 kan løses av elever på nivå 3 (37,5%). Dermed krever de fleste oppgavene i svart løype at elever ikke tenker på et nivå høyere enn 2. Sammenlignet med rød løype er dette et interessant funn, fordi oppgavene som skal ha middels vanskelighetsgrad krever høyere nivå av geometrisk tenkning enn oppgavene som skal være vanskeligst.

Figur 4.24 illustrerer nivå av geometrisk tenkning som kreves for å løse oppgavene innenfor hver løype i oppgavesamlingen i leksjonen «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer».



Figur 4.24. Forekomst av de ulike nivåene innenfor grønn, rød og svart løype i oppgavesamlingen i leksjonen om egenskaper til tredimensjonale figurer.

Som figur 4.24 viser, krever samtlige oppgaver i grønn løype minimum nivå 2 av geometrisk tenkning for å løses. Videre kan alle oppgavene i rød løype løses av elever på det første nivået. Dette er et overraskende funn, fordi det viser at oppgavene som skal være lettest krever høyere nivå av geometrisk tenkning enn oppgavene som skal være vanskeligere.

5.0 Diskusjon og konklusjon

Nå som funnene er presentert, vil jeg diskutere dem og reflektere rundt dem. I dette kapitlet vil jeg oppsummere funnene og bruke dem til å svare på forskningsspørsmålene. Deretter vil jeg reflektere rundt funnene og knytte dem til relevant forskning som er presentert i kapittel 2. Diskusjonen gjennomføres med utgangspunkt i de fire forskningsspørsmålene:

I. Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for å forstå forklaringer i videoene i forelesningene?
II. Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for svare riktig på kontrollspørsmålene i forelesningene?
III. Hvilke nivåer kreves for å løse oppgavene i oppgavesamlingene?
IV. Hvilken sammenheng finnes mellom vanskelighetsgrad på oppgavene i Campus Matte 9 og nivå av geometrisk tenkning som kreves for å løse dem?

Fordi to av forskningsspørsmålene handler om geometrisk tenkning i forelesninger på Campus Matte 9 og de resterende to omhandler oppgavesamlingene, er det naturlig å dele diskusjonen i to deler: forelesninger og oppgavesamlinger. Forskningsspørsmålene er underspørsmål som skal brukes til å besvare problemstillingen i oppgaven som er *Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for å forstå forklaringer og løse oppgaver innenfor egenskaper til geometriske figurer i Campus Matte 9, og hvilken sammenheng finnes mellom vanskelighetsgrad på oppgavene og nivåene som kreves for å løse dem?* Derfor vil jeg konkludere med problemstillingen etter jeg har diskutert forskningsspørsmålene. På slutten av kapittelet vil jeg reflektere rundt hvilke implikasjoner resultatene i studien har for matematikkundervisning.

5.1 Forelesninger

I dette delkapitlet besvares og diskuteres forskningsspørsmål I og II.

Forskningsspørsmål I: Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for å forstå forklaringene i videoene?

Kort oppsummert har elever på det tredje nivået forutsetning til å forstå alle forklaringer i begge leksjoner, og elever på det andre nivået kan forstå alt i leksjonen om tredimensjonale figurer. Resterende kan forstå deler av forklaringene. I tillegg fant jeg at forklaringene om todimensjonale figurer krever høyere nivå av geometrisk tenkning enn de om tredimensjonale figurer. På bakgrunn av funnene vil jeg konkludere med at elever må tenke på det tredje nivået for å forstå forklaringene i videoene, men at elever på lavere nivå vil forstå deler av dem.

Fuys, Geddes og Tischler (1988), fant i likhet med meg at læreverk tilpasset ungdomsskolen inneholder forklaringer som krever nivå 1-3 for å forstå. Dette betyr at de også fant at elever på nivå 3 har forutsetninger til å forstå alle forklaringene i likhet med min studie. I tillegg fant de at de fleste forklaringene er på nivå 1 og 2, hvilket samsvarer med mine funn.

At forklaringene som omhandlet tredimensjonale figurer krever lavere nivå for å forstås enn de om todimensjonale figurer kan ha flere årsaker. Jeg antar at det er fordi tredimensjonale figurer er et nytt tema på ungdomsskolen, mens elevene skal ha arbeidet med todimensjonale figurer siden barneskolen. Mason (1989) fant at elever på ungdomsskolen kan være på ulike nivåer av geometrisk tenkning innenfor ulike områder i geometri. Derfor mener jeg at det er naturlig at forklaringene om tredimensjonale figurer krever et lavere nivå av geometrisk tenkning enn de om todimensjonale figurer.

Forskningsspørsmål II: Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for å svare riktig på kontrollspørsmålene i forelesningene?

Samtlige av kontrollspørsmålene i begge leksjonene som kan tildeles et nivå, ble tildelt nivå 1. Det betyr at kontrollspørsmålene kan løses av elever på nivå 1 og elever på høyere nivå. Fordi kontrollspørsmålene i Campus Matte er oppgaver, vil funnene mine kunne sammenlignes med Fuys et al. (1988) sine funn i forhold til oppgaver. De fant at de fleste oppgavene i læreverkene kan løses av elever på det første nivået opp til 8. trinn. Alle oppgavene i det ene læreverket de analyserte kunne løses ved nivå 1-tenkning, hvilket samsvarer med mine funn om kontrollspørsmålene. Jeg mener det er naturlig at de fleste kontrollspørsmål i introduserende forelesninger krever et lavt nivå av geometrisk tenkning. Dette mener jeg at to grunner. Den første er at jeg tolker hensikten med kontrollspørsmålene er å hente frem forkunnskaper hos elevene og/eller å sikre at elevene følger med i videoene og får med seg den viktigste informasjonen. Den andre grunnen er at elever i ungdomsskolealder ifølge forskning tenker på de to laveste nivåene i van Hieles teori (Alex & Mammen, 2012; Smestad, 2008; Usiskin, 1982).

De fleste kontrollspørsmålene i leksjonen om todimensjonale figurer kan ikke tildeles nivå fordi det ikke er mulig å svare riktig på dem. Dersom disse spørsmålene hadde vært riktige, ville flere og sannsynligvis høyere nivåer kunne vært identifisert.

5.2 Oppgavesamlinger

I denne delen vil forskningsspørsmål III og IV presenteres og diskuteres.

Forskningsspørsmål III: Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for å svare riktig på oppgavene i oppgavesamlingene?

Funnene viser at en liten andel av oppgavene i oppgavesamlingen i leksjonen om egenskaper til todimensjonale figurer kan løses av elever på nivå 1. De fleste oppgavene krever at elever tenker på det andre eller tredje nivået for å ha forutsetning til å svare riktig på dem. Omtrent halvparten av oppgavene ble tildelt nivå 3. I oppgavesamlingen tilhørende leksjonen om egenskaper til tredimensjonale figurer er også en liten del av oppgaven løselig av elever på nivå 1. De resterende oppgavene krever at eleven tenker på minimum nivå 2 for å løse dem. Det vil si at de fleste oppgavene i oppgavesamlingene jeg har analysert krever nivå minimum nivå 2, og mange av oppgavene i en av leksjonene krever nivå 3.

Sammenlignet med oppgavesamlingene Fuys et al. (1988) analyserte, består oppgavesamlingene jeg har analysert fra Campus matte 9 av oppgaver som krever høyere nivå av geometrisk tenkning. Som nevnt i kapittel 5.1.2, fant Fuys et al. (1988) at de fleste oppgavene i læreverk tilpasset 8. trinn kan løses på nivå 1. Fordi forskning viser at de mange elever tenker på nivå 1 på ungdomsskolen (Alex & Mammen, 2012; Usiskin, 1982), vil det bety at mange av elevene ikke har forutsetning til å løse store deler av oppgavesamlingen.

Forskningsspørsmål IV: Hvilken sammenheng finnes mellom vanskelighetsgrad på oppgavene i Campus Matte 9 og nivå av geometrisk tenkning som kreves for å løse dem?

Grønn løype i leksjonen om todimensjonale figurer består av oppgaver som krever alle de tre nivåene for å løses. Rød og svart løype krever nivå 2 og 3 av eleven for at den skal klare å løse oppgavene. Et overraskende funn er at rød løype inneholder en større prosentdel oppgaver som krever tenkning på nivå 3 enn svart løype. Gjennom analyse av oppgavesamlingen i leksjonen om tredimensjonale figurer, kom det frem enda et interessant funn; oppgavene i grønn løype krever eksklusivt nivå 2-tenkning, mens rød løype eksklusivt krever tenkning på det første nivået. På bakgrunn av disse funnene, konkluderer jeg med at det ikke er særlig sammenheng mellom vanskelighetsgrad på oppgavene (satt av læreverket) og nivå av geometrisk tenkning som kreves for å løse dem.

Forskningslitteraturen fant at de fleste oppgavene som er tilpasset elever som presenterer på et høyt nivå i matematikk, stort sett ikke krever høyere nivå av geometrisk tenkning enn oppgavene tilpasset den gjennomsnittlige elev (Fuys et al., 1988). På bakgrunn av Fuys, Geddes og Tischlers funn og mine egne, vil jeg anta at læreverkene ikke tar nivåer av geometrisk tenkning i betraktning når de differensierer oppgaver. Det må derfor være andre kriterier læreverkene legger til grunn enn nivå av geometrisk tenkning når de nivådifferensierer oppgaver.

5.3 Konklusjon

I denne delen skal jeg bruke svarene på forskningsspørsmålene som diskutert tidligere i kapitlet til å svare på problemstillingen i oppgaven: *Hvilke nivåer av geometrisk tenkning kreves for å forstå forklaringer og løse oppgaver innenfor egenskaper til geometriske figurer i Campus Matte 9, og hvilken sammenheng finnes mellom vanskelighetsgrad på oppgavene og nivåene som kreves for å løse dem?*

Elever på alle nivåer av geometrisk tenkning har forutsetning til å forstå deler av eller alle forklaringene i videoene som er analysert i denne studien. Elever på nivå 1 vil forstå minst mens elever som tenker på nivå 2 vil forstå en større andel av forklaringene. Innenfor egenskaper til tredimensjonale figurer har elever på nivå 2 forutsetning til å forstå alle forklaringer. Elever som tenker på det tredje nivået, kan forstå alle forklaringer i de to leksjonene. Begrepet *oppgaver* i problemstillingen, omfatter både kontrollspørsmål og oppgaver i oppgavesamlinger. For å kunne svare riktig på kontrollspørsmålene kreves minimum nivå 1 på samtlige oppgaver som kunne tildeles et nivå. I oppgavesamlingene har elever på nivå 1 forutsetning til å svare riktig på en svært liten andel av oppgavene. De fleste oppgavene krever at eleven tenker på nivå 2 eller 3, hvor en overraskende stor andel av oppgavene krever nivå 3-tenkning innenfor egenskaper til todimensjonale figurer. Dette betyr at elever som tenker på det tredje nivået fra van Hieles teori har forutsetning til å mestre alt det analyserte innholdet i Campus Matte 9. Videre viser funnene ikke en sammenheng mellom nivå av geometrisk tenkning som kreves for å løse oppgavene og vanskelighetsgraden Campus Matte har satt på dem.

5.4 Implikasjoner

Resultatene fra denne studien har fått meg til å reflektere rundt bruk av læreverk. Dersom man som matematikklærer ønsker å tilpasse undervisningen slik at enkeltelever får arbeide med innhold som passer til deres nivå av geometrisk tenkning, må man være kritisk til hvilke nivåer som faktisk kreves for å kunne forstå og mestre innholdet. En forutsetning for å kunne gjøre dette er å ha kjennskap til hvilket nivå av geometrisk tenkning elevene sine er på i de ulike geometriske emnene. Dette kan for eksempel gjøres ved å gjennomføre kartleggingsprøver lignende de Usiskin (1982) og Alex og Mammen (2012) brukte i sine studier. Denne studien har vist meg at uansett hvor bra et læreverk er, er det viktig at matematikklæreren setter seg inn i innholdet den lar elevene jobbe med slik at den kan tilpasse for hver enkelt elev så godt som mulig.

At det ikke er noen særlig sammenheng mellom vanskelighetsgrad på oppgavene og nivå av geometrisk tenkning er et spesielt interessant funn. I Campus Matte kan læreren velge hvilke oppgaver enkeltelever skal arbeide med på nettsiden. Funnene mine kan hjelpe lærere å velge hvilke oppgaver som passer for elever på hvert nivå av geometrisk tenkning. En komplett oversikt over oppgaver og hvilke nivå jeg har vurdert dem til å passe for, er lagt som vedlegg.

6.0 Videre forskning

Nå som jeg har viet et år av livet mitt til forskningsfeltet, har jeg flere tanker om hva som burde forskes videre på. Disse tankene deles i dette avsluttende kapittelet.

Selv om jeg har utformet et analyseverktøy som har fungert til å analysere forklaringer og oppgaver om to-og tredimensjonale figurer, finnes det ikke et analyseverktøy eller rammeverk man kan anvende til å analysere andre temaer innenfor matematikken. Det hadde vært fordelaktig for forskningsfeltet om et universelt analyseverktøy som kan brukes til å analysere læringsinnhold på flere områder innenfor geometri hadde blitt utformet.

På grunn av omfanget av oppgaven har jeg ikke hatt plass til å analysere hvilke nivåer av geometrisk tenkning læreplanen tilsier at elevene skal være på etter for eksempel 6. og 9. trinn. Det kunne vært interessant å sammenligne hvilke nivåer som fremkommer i læreplanen med hvilke nivåer ulike læreverk legger til rette for.

Det bringer meg til det siste punktet jeg har, som er at få læreverk har blitt analysert i forhold til van Hiele-nivåene. Jeg mener forskningsfeltet trenger nye bidrag på dette.

7.0 Litteraturliste

Alex, J. K. & Mammen, K. J. (2012). A survey of South African grade 10 learners' geometric thinking levels in terms of the Van Hiele theory. *The Anthropologist*, *14*(2), 124-129. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/09720073.2012.11891229

Bada, S. O. & Olusegun, S. (2015). Constructivism learning theory: A paradigm for teaching and learning. *Journal of Research & Method in Education*, *5*(6), 66-70.

Befring, E. (2020). *Sentrale forskningsmetoder - med etikk og statistikk*. Cappelen Damm Akademisk.

Bryman, A. (2016). *Social Research Methods* (5. utg.). Oxford University Press.

Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics education*, *17*(1), 31-48. https://doi.org/https://doi.org/10.5951/jresematheduc.17.1.0031

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 420-464). Macmillan Publishing Co, Inc.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 81-89. https://doi.org/https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

Denis, L. P. (1987). *Relationships between stage of cognitive development and van Hiele level of geometric thought among Puerto Rican adolescents* [Doktorgradsavhandling, Fordham University]. ProQuest. https://www.proquest.com/openview/87042e9af533781472800e89b18c50bc

Forskrift til opplæringslova. (2006). *Forskrift til opplæringslova* (FOR-2006-06-23-724). Lovdata. https://lovdata.no/LTI/forskrift/2006-06-23-724

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R., W. (1984). *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. Brooklyn College, C.U.N.Y.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R., W. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *3*, i-196.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1995). Towards the design of a standard test for the assessment of the student's reasoning in geometry. Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education

Gutiérrez, A., Jaime, A. & Fortuny, J., M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics education*, *22*(3), 237-251.

Hana, G. (2013). *Matematiske byggesteiner: metamatematikk for lærerutdanningen*. Caspar forlag.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher*, *74*(1), 11-18. https://doi.org/https://doi.org/10.5951/MT.74.1.0011

Huitt, W. & Hummel, J. (2003). Piaget's theory of cognitive development. *Educational psychology interactive*, *3*(2), 1-5.

Campus Inkrement. (2021, 11. oktober). *På hvilken måte er oppgavesamlingen nivådifferensiert?* Campus Inkrement. https://support.inkrement.no/support/solutions/articles/75000030709-pa-hvilken-mate-er-oppgavesamlingen-nivadifferensiert-

Campus Inkrement. (u.å). *Campus Matte 8-10*. https://campus.inkrement.no/Home/CampusMatte_8_10

Jones, K. (2001). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. I L. Haggarty (Red.), *Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice.* (s. 121-139). Routledge Falmer.

Kirfel, C., Brucker, H. J. & Herbjørnsen, O. O. (1999). *Geometri* (2. utg.). Caspar Forlag AS.

Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Levenson, E., Tirosh, D. & Tsamir, P. (2011). *Preschool Geometry: Theory, Research and Practical Perspectives*. Sense Publishers.

Mason, M. M. (1989, 27-31 mars). *Geometric Understanding and Misconceptions among Gifted Fourth-Eighth Graders*. Paper presentert på the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Mason, M. M. (1998). The van Hiele levels of geometric understanding. I M. Littell (Red.), *The professional handbook for teachers: Geometry: Explorations and applications* (s. 4-8). McDougal Littell.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics education*, *14*(1), 58-69.

Opplæringslova. (1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa* (LOV-1998-07-17-61). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61

Pegg, J. (1992). Students' understanding of geometry: Theoretical perspectives. Space - the first and final frontier: Conference proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA),

Smestad, B. (2008). Geometriaktiviteter i lys av van Hieles teorier. *tangenten*, *19*(1), 2-6.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Project)*. University of Chicago.

Utdanningsdirektoratet. (2021, 12. mars). *Læremidler og læringsteknologi i skole og opplæring*. https://www.udir.no/om-udir/tilskudd-og-prosjektmidler/tilskudd-til-laremidler/begrepsavklaring-skole/

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching children mathematics*, *5*(6), 310-316. https://doi.org/https://doi.org/10.5951/TCM.5.6.0310

Veblen, O. (1904). A system of axioms for geometry. *Transactions of the American mathematical society*, *5*(3), 343-384.

Vedlegg

Vedlegg 1: Oversikt over kontrolloppgaver, oppgavetype og tildelt van Hiele-nivå fra leksjonen «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer.

1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer	**Type oppgave**	**Van Hiele nivå**	**Kommentar**
1	Flervalg	1	
2	Flervalg	1	
3	Flervalg	Ikke identifisert	Oppgaven spør om hvilken av tre trekanter som er likebeinte. Alle trekantene er likebeinte, men det går bare an å velge å avgi en av dem som svar.
4	Skriv inn svaret	Ikke identifisert	Oppgaven ber om vinkelsummen til en firkant. Den kan løses uten geometrisk tenkning fordi man får oppgitt vinkelsummen til to trekanter inni firkanten. Derfor kan oppgaven løses med addisjon uten hensyn til geometriske egenskaper.
5	Flervalg	1	
6	Flervalg	Ikke identifisert	Oppgaven spør etter hvilken av figurene som er et

			parallellogram. Det er flere parallellogram som svaralternativ, men det går bare an å velge et.
7	Flervalg	Ikke identifisert	Oppgaven spør etter hvilken av figurene som er en rombe. To av svaralternativene er romber, men det går bare an å velge et.
8	Flervalg	Ikke identifisert	Oppgaven spør etter hvilken av figurene som er et rektangel. To av svaralternativene er rektanler, men det går bare an å velge et.

Vedlegg 2: Oversikt over kontrolloppgaver, oppgavetype og tildelt van Hiele-nivå fra leksjonen «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer.

1.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer	**Type oppgave**	**Van Hiele Nivå**	**Kommentar**
1	Flervalg	1	
2	Flervalg	1	
3	Flervalg	1	
4	Flervalg	1	
5	Flervalg	1	

Vedlegg 3: Oversikt over oppgaver fra oppgavesamlingen, løype, oppgavetype og tildelt van Hiele-nivå fra leksjonen «1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer.

1.1 Egenskaper til todimensjonale figurer	**Løype**	**Type oppgave**	**Van Hiele Nivå**
1a	Grønn	Flervalg	1
1b	Grønn	Flervalg	2
1c	Grønn	Flervalg	3
1d	Grønn	Flervalg	3
2a	Grønn	Flervalg	1
2b	Grønn	Flervalg	1
2c	Grønn	Flervalg	1
2d	Rød	Flervalg	3
2e	Rød	Flervalg	3
2f	Rød	Flervalg	3
3a	Rød	Regn ut, skriv inn svaret.	2
3b	Rød	Regn ut, skriv inn svaret.	2

3c	Rød	Regn ut, skriv inn svaret.	2
3d	Rød	Regn ut, skriv inn svaret.	2
4a	Rød	Regn ut, skriv inn svaret.	2
4b	Rød	Regn ut, skriv inn svaret.	2
4c	Rød	Regn ut, skriv inn svaret.	3
4d	Rød	Regn ut, skriv inn svaret.	3
5a	Rød	Flervalg	3
5b	Rød	Flervalg	3
5c	Rød	Flervalg	3
6a	Svart	Konstruksjon og flervalg.	2
6b	Svart	Konstruksjon og flervalg.	3
6c	Svart	Konstruksjon og flervalg.	2

6d	Svart	Konstruksjon og flervalg.	3
7a	Svart	Regn ut og skriv inn svaret.	2
7b	Svart	Regn ut og skriv inn svaret.	2
7c	Svart	Regn ut og skriv inn svaret.	2
7d	Svart	Regn ut og skriv inn svaret.	3

Vedlegg 4: Oversikt over oppgaver fra oppgavesamlingen, løype, oppgavetype og tildelt van Hiele-nivå fra leksjonen «2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer.

2.1 Egenskaper til tredimensjonale figurer	**Løype**	**Type oppgave**	**Van Hiele Nivå**
1a	Grønn	Flervalg	2
1b	Grønn	Flervalg	2
1c	Grønn	Flervalg	2
2a	Grønn	Flervalg	2
2b	Grønn	Flervalg	2

2c	Grønn	Flervalg	2
3a	Grønn	Flervalg	2
3b	Grønn	Flervalg	2
3c	Grønn	Flervalg	2
4a	Grønn	Tekstoppgave med flervalg.	2
4b	Grønn	Tekstoppgave med flervalg.	2
4c	Grønn	Tekstoppgave med flervalg.	2
5a	Rød	Skriveoppgave.	1
5b	Rød	Skriveoppgave.	1
5c	Rød	Skriveoppgave.	1